

UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS



Facultad 2

# Algoritmo de Navegación Integrada INS/GPS para vehículos autónomos subacuáticos

Trabajo de Diploma para optar por el título de Ingeniero  
en Ciencias Informáticas

**Autor:** Roniel Sánchez Hernández.

**Tutores:** Ing. Darvis Dorvigny Dorvigny  
MsC. Mirta Beltrandez Sardiñas

La Habana, 28 de junio de 2016

“Año 58 de la Revolución”

## **Declaración de Autoría**

Declaro que soy el único autor del trabajo para optar por el título de Ingeniero en Ciencias Informáticas titulado “Implementación de algoritmo para Navegación Integrada INS/GPS con Filtro Extendido de Kalman” y reconozco a la Universidad de las Ciencias Informáticas y la Facultad # 2 los derechos patrimoniales del mismo con carácter exclusivo.

Para que así conste firmo el presente a los \_\_\_\_días del mes \_\_\_\_\_ del año 2016.

\_\_\_\_\_  
Roniel Sánchez Hernández

\_\_\_\_\_  
Firma del Tutor

Ing. Darvis Dorvigny Dorvigny

\_\_\_\_\_  
Firma del tutor

MSc.Mirta Beltrandez Sardiñaz

## Agradecimientos

*Se agradece en primer lugar a la Revolución al Comandante en Jefe Fidel Castro por su genial idea de crear la Universidad de las Ciencias Informáticas. A mis tutores, el Ing. Daruis Doruigny por enseñarme tanto y confiar en mí cuando más lo necesitaba. y la MsC. Mirta Beltrández por hacer hasta lo imposible por ayudarme. A mi abuela y mi mamá por mostrarme siempre el camino a seguir y dejarme decidir los pasos para caminar. A mis tíos José Armando y Moisés, por enseñarme principios y valores, que solo un padre es capaz de enseñar. A mi esposa, que, aunque lejos esté, me dio el regalo más grande: Nathan. Motivo por el que me esfuerzo día a día para ser un hombre mejor, y pueda estar siempre orgulloso de papá. A mis amigos Cueva, Pepe, Manuel, Piedra y Diane, que me apoyaron siempre en toda la carrera.*

## Dedicatoria

*Dedico esta investigación principalmente a mi hijo que fue el motor impulsor para concluir la carrera. A mi mamá, mi abuela y mi esposa por tener la paciencia suficiente para hacerme parte de su vida. Y al tutor, porque sin él, hubiese sido imposible que aprendiera tanto en tan poco tiempo.*

## **Resumen**

La Navegación Integrada es un tema de gran interés y actualidad. La estimación de los parámetros de navegación con tecnología de bajo costo constituye un problema ampliamente abordado por diversos centros de investigación y desarrollo. En este trabajo de diploma se aborda el diseño de un algoritmo de navegación integrada INS/GPS con Filtro Extendido de Kalman, para vehículos autónomos con sensores de bajo costo. Durante el desarrollo de la investigación se analizaron las ecuaciones de mecanización de un Sistema de Navegación Inercial en diferentes marcos de referencia, así como el funcionamiento del filtro de Kalman y su versión extendida para la corrección de errores en las mediciones de sensores inerciales. Las pruebas estadísticas permitieron la comprobación de la similitud entre los parámetros de navegación generados por el algoritmo con los parámetros obtenidos de experimentos reales.

**Palabras claves:** navegación integrada INS/GPS, parámetros de navegación, sensores inerciales, Filtro de Kalman, algoritmo.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	8
CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	12
1.1    Navegación Inercial.....	12
1.1.1 Algoritmos de navegación inercial .....	13
1.1.2 Marcos de referencia .....	13
1.1.3 Marco de referencia inercial ECI.....	14
1.1.4 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco ECI.....	14
1.1.5 Marco de referencia de la Tierra ECEF .....	16
1.1.6 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco ECEF.....	16
1.1.7 Marco de referencia de Navegación.....	17
1.1.8 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco de navegación .....	18
1.1.9 Marco de referencia del cuerpo.....	20
1.1.10 Formas de representación de la orientación del vehículo .....	21
1.1.11 Estimador de orientación .....	23
1.1.13 Consideraciones sobre los sistemas de navegación inercial .....	24
1.2 Sistema de Posicionamiento Global (GPS).....	25
1.2.1 Funcionamiento del GPS .....	26
1.2.2 Fuentes de error del GPS .....	26
1.3 Sistemas de navegación Integrada .....	27
1.4 Filtro de Kalman.....	29
1.4.1 Algoritmo de filtro de Kalman.....	30
1.4.2 Filtro Extendido de Kalman.....	31
1.4.3 Algoritmo de Filtro Extendido de Kalman .....	31
1.5 Principales resultados obtenidos en investigaciones precedentes.....	32
1.6 Herramientas y Tecnologías utilizadas en la implementación del algoritmo.....	33
1.6.1 Herramientas.....	33
1.6.2 Tecnologías .....	33
1.7 Conclusiones del capítulo .....	34
CAPITULO 2: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE SOLUCIÓN .....	35
2.1 Presentación de solución .....	35
2.2 Propuesta de algoritmo de mecanización del INS para la solución del problema .....	35
2.2.1 Descripción del algoritmo de mecanización del INS.....	36
2.3 Descripción del estimador de Orientación y Rumbo (AHRS).....	37

2.3.1 Ecuaciones del filtro para el estimador de orientación .....	39
2.3.2 Descripción del algoritmo del estimador de orientación .....	40
2.4 Descripción del Filtro Extendido de Kalman.....	41
2.5 Descripción del Sistema de Navegación Integrada INS/GPS mediante filtro de Kalman.....	43
2.5 Conclusiones del capítulo .....	45
CAPITULO 3: PRUEBAS.....	46
3.1 Datos experimentales utilizados .....	46
3.2 Comparación de los ángulos con los datos del experimento .....	46
3.3 Comparación de la posición en latitud longitud y altura con el experimento .....	48
3.4 Comparación de la velocidad .....	49
3.6 Análisis estadístico de los resultados.....	50
3.6.1 Comparación de la latitud.....	50
3.6.2 Comparación de la longitud .....	51
3.6.3 Comparación de la altura .....	52
3.6.4 Comparación de la velocidad .....	53
3.8 Conclusiones del capítulo .....	54
Conclusiones Generales.....	55
Recomendaciones .....	56
Referencias bibliográficas.....	57

## INTRODUCCIÓN

Los vehículos autónomos han tenido un desarrollo vertiginoso en los últimos años. Países como EEUU y otros miembros de la OTAN marcan el ritmo de desarrollo, fundamentalmente para aplicaciones militares. Entre ellos se encuentran los vehículos autónomos subacuáticos (AUVs, del inglés *Autonomous Underwater Vehicles*). Estos son utilizados en aplicaciones civiles de índole científica, para el descubrimiento y estudio de los fondos y ecosistemas marinos, además de cumplir misiones específicas de alto riesgo para los seres humanos (Robles Carrasco 2015).

En Cuba, la investigación en los AUVs ya exhibe resultados importantes. El Centro de Investigación y Desarrollo Naval (CIDNAV) desarrolló un prototipo de un vehículo subacuático, planteándose la tarea de incorporarle la capacidad de cumplir misiones de forma autónoma. A partir de esta necesidad, el Grupo de Automática, Robótica y Percepción (GARP) de la Universidad Central de Las Villas (UCLV) tiene la tarea de desarrollar un piloto automático capaz de cumplir con los siguientes requisitos (Laguardia y Sahli 2015):

- ❖ Determinar con precisión la posición, velocidad, y orientación del vehículo.
- ❖ Planificar y ejecutar las maniobras necesarias para moverse entre diferentes localizaciones.
- ❖ Usar solo sensores de bajo costo, que son los accesibles para Cuba.

A los parámetros de posición, velocidad y orientación de un vehículo se les denomina parámetros de navegación. Estos son determinados por un algoritmo de navegación, que se ejecuta en una computadora de navegación (Castillo, Gonzalo. 2012).

Un sistema de navegación inercial (INS, del inglés *Inertial Navigation System*), se cataloga como un sistema de navegación a estima, es decir, no requiere de fuentes externas para su funcionamiento. Ha sido objeto de estudio en aplicaciones en los ámbitos comerciales y militares (MacKenzie 1993; Llumiquinga Llumiquinga y Beltrán Sánchez 2016). Según (Groves 2013), la principal ventaja de este tipo de navegación es la tasa de muestreo, menor a 30 ms; además, al usar sensores inerciales de tecnología MEMS (*micro-electromechanical systems*, sistemas micro-electromecánicos) su tamaño y precio son ideales en aplicaciones civiles de vehículos autónomos; sin embargo, la precisión de este tipo de navegación se degrada con el tiempo, debido a los errores acumulativos causados por la deriva en los sensores, el sesgo, el factor de escala, y las no linealidades (Aggarwal 2010).



Los sensores inerciales de tecnología MEMS para la navegación, de carácter comercial. Son más accesibles y se caracterizan por ser poco fiables, ruidosos, imprecisos, de mala calidad, con altos niveles de sesgo, tanto dinámico como estático, que empeoran el cálculo de los parámetros de navegación en cuanto a la precisión de las mediciones. Construir soluciones de navegación con estos sensores implica un costo enorme en la estimación. Por otra parte, se encuentran los sensores de carácter táctico o estratégico, y se caracterizan por tener precios elevados, y la mayoría simplemente no está disponible en el mercado.

El surgimiento de sistemas GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*) como GPS y GLO-NASS permite la medición de la posición y velocidad del vehículo de forma absoluta. Sin embargo, este tipo de sistemas poseen una baja tasa de muestreo y una alta vulnerabilidad a interferencias externas, como las atmosféricas, los efectos de *multipath* o apantallamientos de la señal. Por otra parte, no tienen una respuesta adecuada a altas tasas de muestreo. Estas carencias son el principal motivo por la cual los sistemas GNSS no pueden ser utilizados exclusivamente en algunas aplicaciones como puede ser la aviación comercial (Force y Miller 2015). No obstante, más allá de las desventajas que estos sistemas presentan, cuentan con la gran ventaja de poseer un error acotado determinado a priori (Castillo, Gonzalo. 2012).

Por lo antes expuesto, se considera que:

- Los sensores inerciales de bajo costo son poco fiables, ruidosos, imprecisos, de mala calidad, con altos niveles de sesgo, tanto dinámico como estático, que empeoran el cálculo de los parámetros de navegación en cuanto a precisión y exactitud.
- Los sensores inerciales de carácter táctico o estratégico tienen precios elevados para Cuba, y la mayoría no está disponible en el mercado.
- El entorno operacional de los sistemas de navegación por satélite juega un papel importante en la calidad de las medidas obtenidas, debido a que se necesita mantener en línea de vistas al menos cuatro satélites.
- Bajo condiciones adversas, existen dificultades en el seguimiento de los satélites, introduciendo errores de medida que puedan sesgar los parámetros estimados.
- Los GNSS pueden ser interferidos por los países que los controlan interrumpiendo su disponibilidad o conociendo la ubicación del dispositivo que lo usa.

A partir de la situación problemática anterior se identificó como **problema a resolver**: ¿Cómo estimar parámetros de navegación de un vehículo autónomo subacuático con sensores inerciales de bajo costo?

Para dar solución al problema planteado se define como **objetivo general**: Implementar un algoritmo de navegación integrada INS/GPS que fusione información de sensores inerciales de bajo costo con referencia absoluta, mediante filtro de Kalman, para la estimación de los parámetros de navegación de un vehículo autónomo subacuático.

Se plantearon los siguientes **objetivos específicos**:

- ✓ Analizar los referentes teóricos sobre los algoritmos de mecanización de un INS, Navegación Integrada y Algoritmo de filtro de Kalman para estimación de parámetros de navegación.
- ✓ Implementar un algoritmo de mecanización de un INS usando filtro de Kalman para su fusión con datos de GPS.
- ✓ Validar el correcto funcionamiento del algoritmo.

En consecuencia con lo anterior, se determinó como **objeto de estudio**: Los sistemas de navegación integrada INS/GPS, teniendo como **campo de acción**: La estimación de los parámetros de navegación para vehículos autónomos subacuáticos.

Para dar cumplimiento a los objetivos planteados, se proponen realizar las siguientes tareas de investigación:

- ✓ Análisis de los referentes teóricos sobre mecanización de un sistema de navegación inercial, navegación integrada y algoritmo de filtro de Kalman para estimación de parámetros de navegación.
- ✓ Implementación de un algoritmo de mecanización de un INS.
- ✓ Implementación de un filtro de Kalman para fusión de INS con datos de GPS.
- ✓ Validación de la funcionalidad del algoritmo propuesto de navegación integrada.

Para apoyar el desarrollo de la investigación se emplean los siguientes métodos científicos:

#### **Método Teórico:**

- ✓ **Análisis-síntesis**: permitió analizar individualmente los principales conceptos relacionados con el área de estudio a tratar, posibilitando un análisis de cada uno, para luego llevar a cabo el estudio de las relaciones que se establecen entre ellos.

- ✓ **Enfoque- sistémico:** permitió seguir la lógica interna de los algoritmos de navegación, los datos y los resultados de los cálculos en las pruebas de errores.

#### **Método Empírico:**

- ✓ **Medición:** permitió probar los resultados de la implementación del algoritmo de Navegación Integrada INS/GPS con Filtro Extendido de Kalman garantizando el correcto funcionamiento del mismo.

#### **Estructura del documento**

El presente documento está estructurado en tres capítulos, a continuación, se muestra una breve descripción de cada uno de ellos:

**CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.** Contiene el marco teórico en el que se muestran las principales definiciones utilizadas en la investigación. Incluye un estudio del estado del arte de los principales algoritmos de navegación integrada INS/GPS existentes en la actualidad, con el objetivo de seleccionar los que se consideren que puedan contribuir a la solución del problema.

**CAPÍTULO 2: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN.** Se realiza la implementación de un algoritmo de navegación inercial, un estimador de orientación, y la estrategia de fusión con datos de GPS, mediante Filtro Extendido de Kalman.

**CAPÍTULO 3: PRUEBAS.** Se valida el funcionamiento del algoritmo de navegación integrada INS/GPS y se comparan los parámetros de navegación generados con datos registrados en experimentos realizados por el GARP. Se realizan pruebas estadísticas de comparación de medias.

# CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

## Introducción

El presente capítulo aborda las consideraciones teóricas fundamentales sobre la mecanización de un INS en diferentes marcos de navegación. Se precisan las regularidades de los sistemas de navegación integrada INS/GPS, para la estimación de los parámetros de navegación de un vehículo autónomo subacuático. Además, se describen los sensores inerciales de bajo costo y los sistemas de navegación por satélite permitiendo dar respuesta a la necesidad de la navegación integrada.

### 1.1 Navegación Inercial

El problema de la navegación consiste en conocer la posición de un vehículo en cada instante de tiempo. Antiguamente los movimientos por tierra se basaban en puntos de referencia conocidos, y para los movimientos en el mar no se podía perder de vista la costa. Existieron diferentes métodos para dar solución a la necesidad de conocer posiciones en la superficie, el más tradicional era la observación de los astros para obtener referencias espaciales. Los métodos antiguos carecen de precisión para aplicaciones de vehículos autónomos. (Titterton y Weston 2004)

Con la llegada del siglo XX, aparecieron nuevos sistemas de posicionamiento. La principal fuerza de desarrollo provino de los intereses militares, que buscaban determinar la posición de sus unidades de ataque para guiarlas hacia sus objetivos. Por esta necesidad se desarrollaron métodos de navegación inercial. (Titterton y Weston 2004)

La navegación inercial se basa en la integración de aceleraciones registradas por acelerómetros y velocidades angulares registradas por giróscopos. Se sustenta en el principio de la cinemática que plantea que : *“conocidos en un instante inicial la velocidad, la orientación y la posición de un móvil, así como los valores instantáneos presentes y futuros de su aceleración lineal y su velocidad angular relativas a un sistema de referencia dado, es posible calcular la posición, la velocidad y la orientación del vehículo en todo instante futuro”* (España 2010). Considerando el planteamiento anterior se puede destacar que, la aceleración lineal y la velocidad angular de un cuerpo, pueden ser medidas sin información exterior al mismo.

Las ecuaciones de navegación son las ecuaciones diferenciales de navegación transformadas de modo tal que sus funciones de entrada sean las magnitudes medidas

por instrumentos inerciales. (Rogers 2003). De esta definición, se deriva el concepto de mecanización de un sistema de navegación inercial, como la forma en que se expresan las ecuaciones de navegación en función del marco de referencia elegido, que será abordado posteriormente.

Si  $\vec{P}, \vec{f}, g \in R^3$  son la posición de un vehículo, la fuerza específica actuante sobre él y la aceleración gravitacional en función de su posición, respectivamente, por el principio de la mecánica clásica se obtiene la ecuación diferencial cuya solución determina la posición y la velocidad del móvil en instantes de tiempo posteriores. (Goldstein 1987)

$$\dot{V} = \ddot{P} = g_g(P) + f(t)$$

$$P(t_0) = P_0$$

$$V(t_0) = V_0$$

Donde

- $\dot{V}$  es la derivada de la velocidad,
- $\ddot{P}$  es la derivada de segundo orden de la posición,
- $g_g(P)$  es la aceleración de la gravedad en función de la posición,
- $f(t)$  es la aceleración en el instante de tiempo (t).
- $P(t_0) = P_0$  es la posición inicial,
- $V(t_0) = V_0$  es la velocidad inicial.
- 

### 1.1.1 Algoritmos de navegación inercial

Los algoritmos de navegación inercial se sustentan en la segunda ley de Newton. Es el encargado de obtener posición (latitud, longitud, altura), velocidad y orientación (alabeo, cabeceo, rumbo) de un cuerpo en un marco de referencia utilizando las ecuaciones cinemáticas de navegación.

Los algoritmos de navegación se desarrollan según el marco de referencia elegido. A continuación, se describen los principales marcos de referencia y se describen las ecuaciones de navegación en cada uno de ellos.

### 1.1.2 Marcos de referencia

En la navegación, se utilizan como marcos de referencia a los sistemas de coordenadas, que no son más que un conjunto de vectores y números que no tienen sentido si no están relacionarlos con una referencia conocida. A menos que se indique lo contrario,

estos sistemas son ortogonales, dextrógiros y cartesianos (Groves 2013). Únicamente difieren en el origen, la orientación relativa de sus ejes y el movimiento relativo entre sus planos. (Rogers 2003)

### 1.1.3 Marco de referencia inercial ECI

Este marco de referencia tiene su origen en el centro de masa de la Tierra y se supone que no rota respecto al espacio inercial. Se puede afirmar que esto no es del todo cierto, porque la Tierra se traslada alrededor del Sol y además rota respecto a su eje, pero se tomará este sistema como inercial. Los ejes del sistema ECI están fijados en las estrellas. El eje Z coincide con el eje polar y el plano perpendicular al eje Z coincide con el Ecuador. El eje X e Y no rotan con la tierra, apuntando X directamente al equinoccio vernal (Robles Carrasco 2015). El sistema de coordenadas inercial solo tiene interés teórico porque es en el único marco en que se cumplen las leyes de Newton exactamente como fueron planteadas. (Liu et al. 2015)

### 1.1.4 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco ECI

En este caso el sistema de referencia es inercial y las ecuaciones de Newton proveen directamente las ecuaciones cinemáticas que determinan la evolución de las coordenadas  $\vec{P}^i$  de la posición de un móvil:

$$m\ddot{P}^i = mg_g^i + F^i$$

Siendo  $m$  la masa del móvil,  $mg_g^i$  la fuerza gravitacional en coordenadas inerciales y  $F^i$  la fuerza no gravitacional o inercial resultante actuando sobre el vehículo. Introduciendo en la definición de la fuerza específica:  $f^i = F^i/m$ , resulta la ecuación fundamental de la navegación inercial en coordenadas inerciales:

$$\ddot{P}^i = g_g^i + C_b^i f^b$$

Puesto que la fuerza específica efectivamente medida por los acelerómetros a bordo del vehículo es  $f^b$  y no  $f^i$ , es necesario disponer de una matriz ortonormal que garantice el cambio del marco del cuerpo al marco inercial, conocida como matriz de cosenos directores  $C_b^i$  que será abordada en epígrafes posteriores. Agrupando la ecuación cinemática, la evolución de  $C_b^i$  y la ecuación de la velocidad:  $\vec{V}^i = \dot{\vec{P}}^i$  se obtiene el sistema de ecuaciones de navegación en coordenadas inerciales:

$$\begin{aligned} \dot{P}^i &= \vec{V}^i; & \vec{P}^i(0) &= \vec{P}_0^i \\ \dot{V}^i &= g_g^i(\vec{P}^i) + C_b^i f^b; & \vec{V}^i(0) &= \vec{V}_0^i \\ \dot{C}_b^i &= C_b^i S(\vec{\omega}_{ib}^b); & C_b^i(0) &= C_{b,0}^i \end{aligned}$$

Donde los vectores velocidad angular y fuerza específica respecto al sistema inercial,  $\vec{\omega}_{ib}^b$  y  $\vec{f}^b$  medidos por los sensores, son las funciones forzantes del sistema y  $\vec{P}_0^i, \vec{V}_0^i, C_{b,0}^i$  la posición, la velocidad y la orientación iniciales.

En la siguiente figura se resume la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECI.

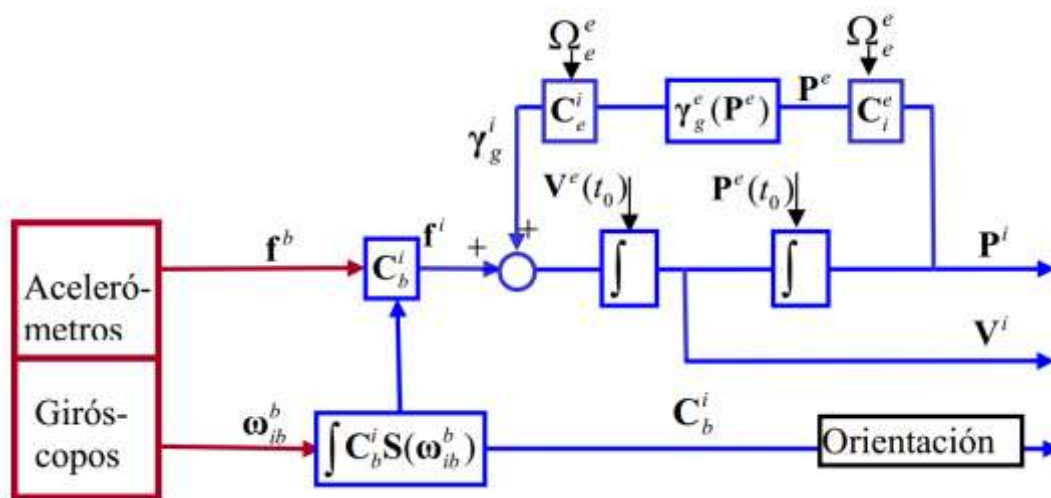


Figura 1: Esquema de mecanización en el marco inercial. Fuente: (Titterton y Weston 2004)

Utilizando las ecuaciones anteriormente planteadas, el algoritmo de navegación inercial se puede describir de la siguiente manera:

- 1- Se obtienen las mediciones de los sensores inerciales.
- 2- Se obtiene la orientación mediante la integral de la velocidad angular en el marco inercial.
- 3- Se genera la matriz de cosenos directores para convertir del marco del cuerpo al marco inercial.
- 4- Se convierte la aceleración del marco del cuerpo al marco inercial.
- 5- Se suma a la aceleración la corrección de la gravedad.
- 6- Se integra la aceleración y se obtiene el vector de velocidad ( $v_x, v_y, v_z$ ).
- 7- Se integra la velocidad y se obtiene el vector de posición (latitud, longitud, altura).

### 1.1.5 Marco de referencia de la Tierra ECEF

También se le conoce como sistema de coordenadas geocéntrico. Tiene su origen en el centro de masa de la Tierra y sus ejes rotan con ella. El eje Z se dirige directamente al norte a lo largo del eje polar. Los ejes X e Y están en el plano ecuatorial con X dirigido hacia el meridiano de Greenwich (0° latitud, 0° longitud) y el eje Y 90° hacia el Este (Rogers 2003).

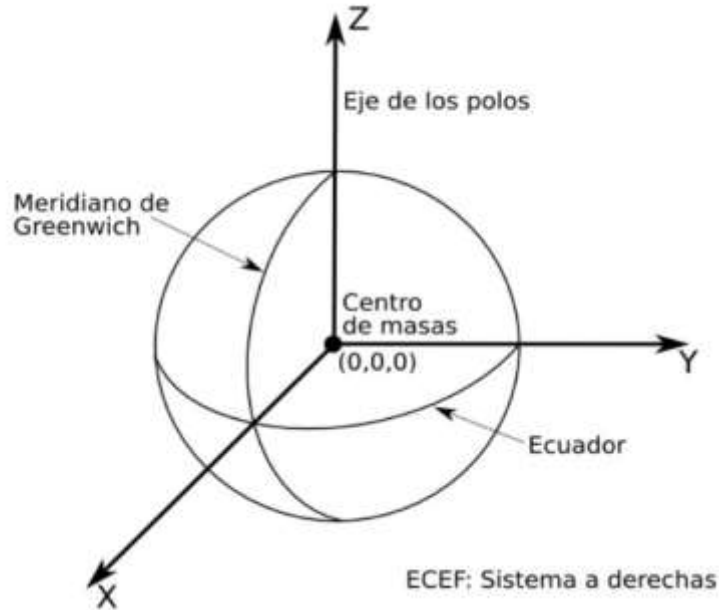


Figura 2: Descripción del marco de navegación ECEF marco de La Tierra Fuente: (Titterton y Weston 2004)

### 1.1.6 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco ECEF

Derivando dos veces respecto al tiempo la relación:  $\vec{P}^i = C_e^i \vec{P}^e$  y tomando  $\omega_{ie}^i = \Omega_{ie}^e$  como constante de la velocidad de rotación de la Tierra.

En (Castillo, Gonzalo. 2012) se tratan rigurosamente las derivaciones para obtener las ecuaciones que caracterizan el estado de navegación en coordenadas ECEF:

$$\begin{aligned} \dot{P}^e &= V^e & P^e(0) &= P_0^e \\ \dot{V}^e &= C_b^e f^b + g^e(\Omega_e^e, P^e) - 2(\Omega_e^e \times V^e) & V^e(0) &= V_0^e \\ \dot{C}_b^e &= C_b^e S(\omega_{ib}^b) - S(\Omega_e^e) C_b^e & C_b^e(0) &= C_{b,0}^e \end{aligned}$$

Donde el término  $-2(\Omega_e^e \times V^e)$  se denomina *aceleración de Coriolis* en honor a su descubridor.



A continuación, se muestra la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECEF. (Titterton y Weston 2004)

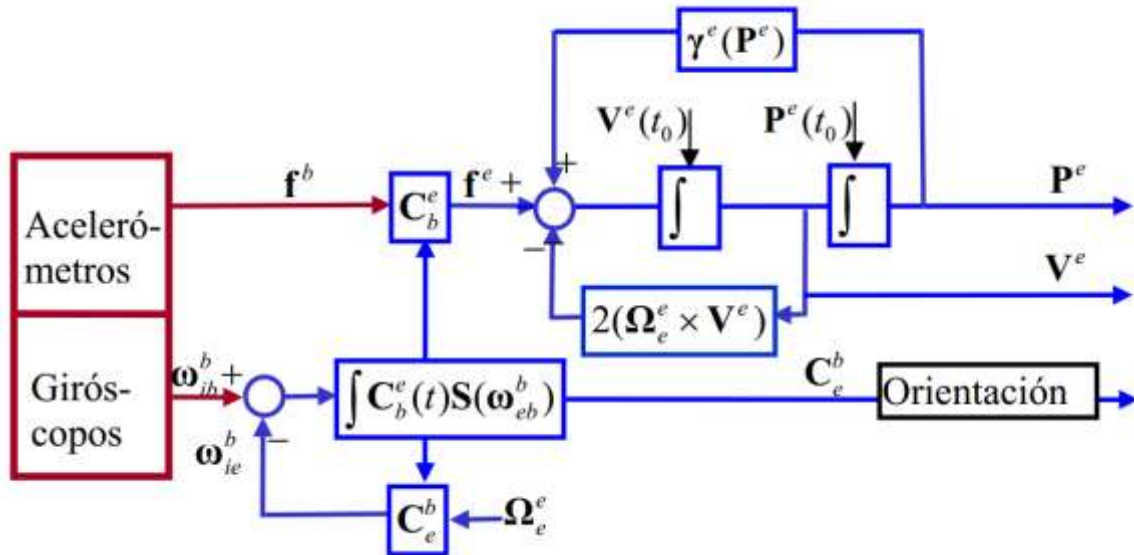


Figura 3: Esquema de mecanización en el marco ECEF. Fuente: (Titterton y Weston 2004)

Utilizando las ecuaciones anteriormente planteadas, los pasos para el algoritmo de navegación inercial se puede describir de la siguiente manera:

- 1- Se obtienen las mediciones de los sensores inerciales.
- 2- Se obtiene la orientación (alabeo, cabeceo, rumbo) mediante la integral de la velocidad angular en el marco de La Tierra.
- 3- Se genera una matriz de cosenos directores para convertir del marco del cuerpo al marco de La Tierra y otra para convertir los ángulos del marco de la Tierra al marco del cuerpo.
- 4- Se convierte la aceleración del marco del cuerpo al marco de la Tierra.
- 5- Se suma a la aceleración la corrección de gravedad ( $g^e(\Omega_e^e, P^e)$ ) y se integra para obtener el vector de velocidad en un instante inicial.
- 6- Se le suma a la aceleración la corrección de gravedad ( $g^e(\Omega_e^e, P^e)$ ) y se le resta la aceleración de Coriolis ( $2(\Omega_e^e \times V^e)$ ).
- 7- Se integra la aceleración corregida y se obtiene el vector de velocidad ( $v_x, v_y, v_z$ ).
- 8- Se integra la velocidad y se obtiene el vector de posición (latitud, longitud, altura).

### 1.1.7 Marco de referencia de Navegación

El marco de referencia de Navegación tiene su origen en la localización del sistema inercial. Es un sistema local con sus ejes X Y en el plano tangente al punto de la Tierra

donde está el origen. El eje X apunta al norte, el eje Y al Este, y el eje Z hacia abajo, aunque debe ser especificado. También se le conoce como NED (North, East, Down) ya que sus ejes apuntan a estas direcciones. Otra posible configuración sería con el eje X apuntando al este, el eje Y apuntando al norte y el eje Z apuntando hacia arriba, también conocido como ENU (East, North, Up). El mismo que presenta dificultades cuando se acerca a latitudes cercanas a los polos. (Groves 2013)

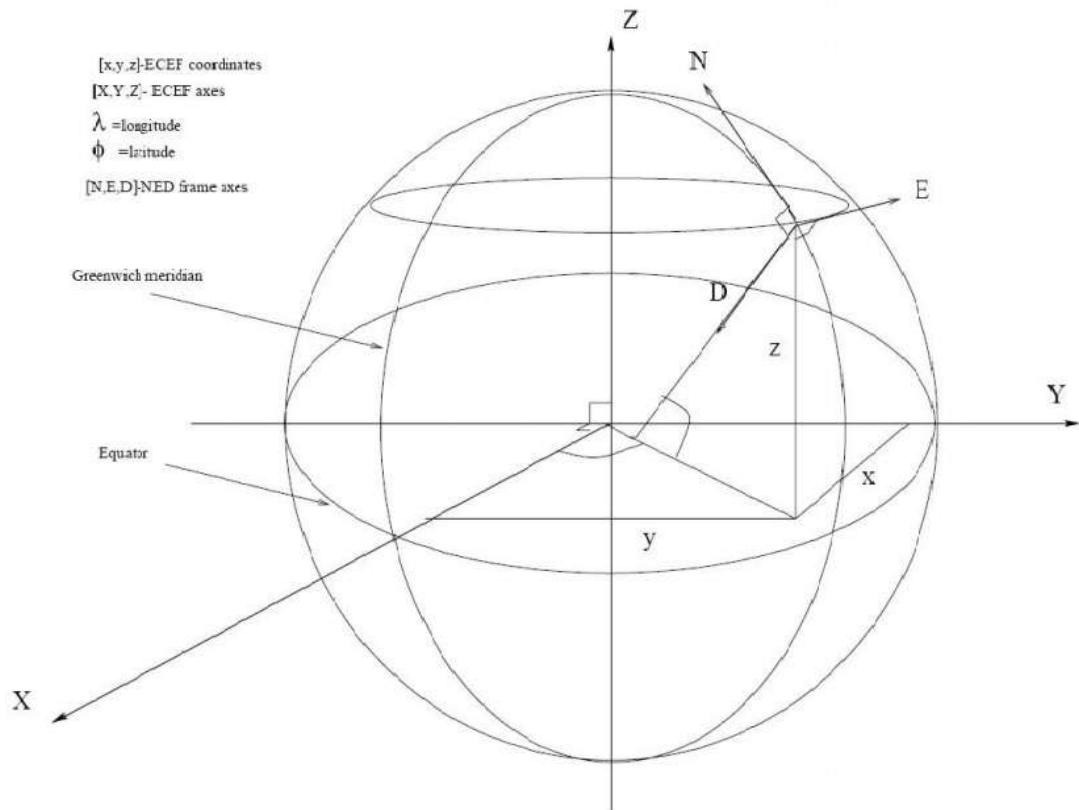


Figura 4: Esquema de coordenadas de navegación NED Fuente: (Titterton y Weston 2004)

### 1.1.8 Algoritmo de navegación inercial respecto al marco de navegación

Debido a los errores en los sensores, las medidas de los sensores deben ser compensadas. En el caso de los giróscopos para corregir la deriva de las medidas angulares respecto al espacio inercial, utilizando  $\omega_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - d_{ib}^b$  siendo  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  la salida de los giróscopos y  $d_{ib}^b$  su deriva.

Corregidas las velocidades angulares, se utilizan para calcular la matriz de transformación entre los marcos del vehículo y el de navegación  $C_b^n$ , necesaria para transformar las medidas de los acelerómetros ( $f^b$ ). También deberán corregirse para eliminar el sesgo de los acelerómetros ( $b^b$ )

$$f^b = \tilde{f}^b - b^b$$

Aquí,  $f^b$  además de la aceleración del vehículo, contiene:

- 1)  $G(r)$ , la aceleración gravitacional provocada por el campo gravitacional terrestre y está en función de la posición;
- 2)  $\Omega_{ie}\Omega_{ie}r$ , la aceleración centrífuga y  $\Omega_{ie}v$ , la aceleración Coriolis, ambas provocadas por la rotación terrestre. Como sólo interesa la aceleración del vehículo, el resto de aceleraciones deben eliminarse. Una vez obtenidas las aceleraciones lineales, se integran para obtener la velocidad y la posición en el marco de interés. La figura representa el procedimiento general para obtener la solución inercial, y matemáticamente se representa por medio de las ecuaciones.

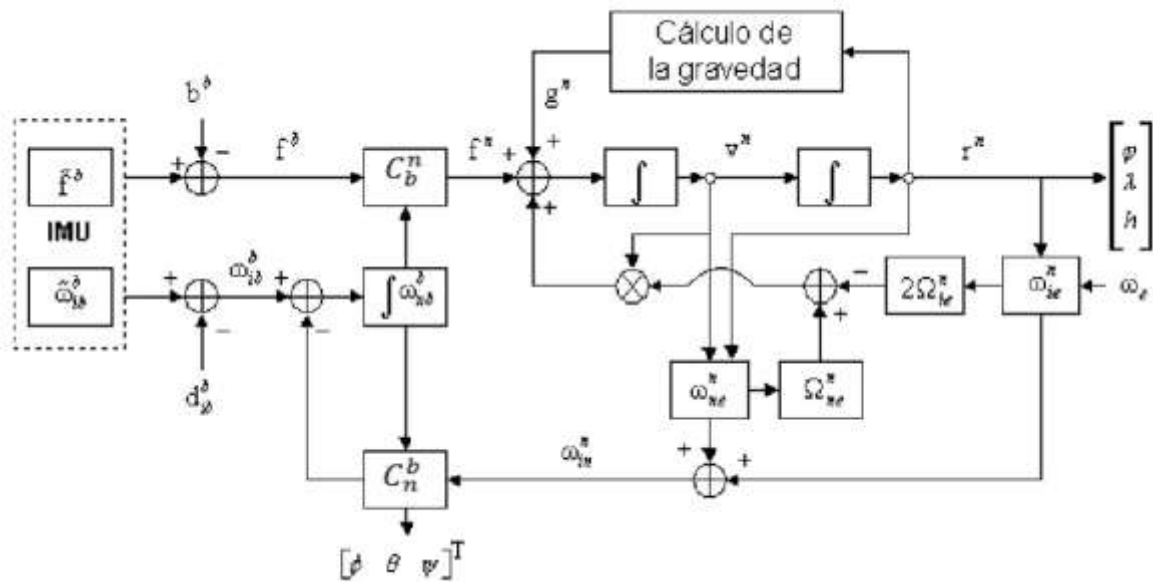


Figura 5: Esquema de mecanización en el marco de navegación. Fuente: (González y Rubio 2004)

$$\begin{bmatrix} \dot{r}^n \\ \dot{v}^n \\ \dot{R}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mv^n \\ C_b^n f^b + (\Omega_{ne}^n - 2\Omega_{ie}^n)v^n + g^n \\ C_b^n \Omega_{nb}^b \end{bmatrix}$$

Donde  $r^n = [\phi \ \lambda \ h]^T$  es el vector posición,  $v^n = [V_N V_E V_D]^T$  es el vector velocidad y  $g^n$  representa el vector de gravedad local. La matriz M está definida por la siguiente ecuación:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\phi + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_\lambda + h)\cos(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y la ecuación que define  $\Omega_{nb}^b$  es:

$\Omega_{nb}^b = \Omega_{ib}^b C_b^n (\Omega_{ie}^n + \Omega_{ne}^n)$  siendo  $R_\phi$  y  $R_\lambda$  los radios terrestres en la latitud y longitud dadas. (González y Rubio 2004)

Utilizando las ecuaciones anteriormente planteadas, los pasos del algoritmo de navegación inercial se pueden describir de la siguiente manera:

- 1- Se obtienen las mediciones de los sensores inerciales.
- 2- Se corrigen los datos en bruto de los sensores restándole las perturbaciones.
- 3- Se integra la velocidad angular y se obtiene la matriz de transformación del marco de navegación al marco del cuerpo.
- 4- Se obtiene la orientación (alabeo, cabeceo, rumbo) mediante la integral de la velocidad angular en el marco de la Tierra.
- 5- Se genera una matriz de cosenos directores para convertir del marco del cuerpo al marco de navegación.
- 6- Se convierte la aceleración del marco del cuerpo al marco de navegación.
- 7- Se suma a la aceleración la corrección de la gravedad ( $g^e(\Omega_e^e, P^e)$ ) y se suma la aceleración de Coriolis ( $2(\Omega_e^n \times V^e)$ ).
- 8- Se integra la aceleración corregida y se obtiene la velocidad en los tres ejes ( $v_x, v_y, v_z$ ).
- 9- Se integra la velocidad y se obtiene la posición (latitud, longitud, altura).

### 1.1.9 Marco de referencia del cuerpo

Este sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de masa del vehículo. Se utiliza en plataformas con los sensores fijos en el vehículo, y sus ejes se mueven con él. (Rogers 2003)

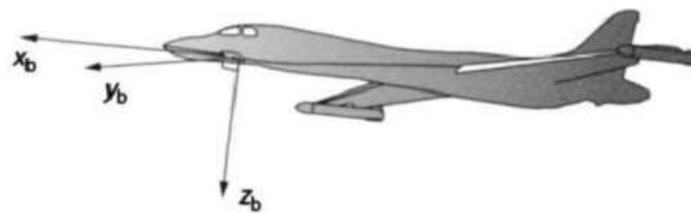


Figura 6: Representación del marco de referencia del cuerpo. (Titterton y Weston 2004)

### 1.1.10 Formas de representación de la orientación del vehículo

Uno de los objetivos principales de la navegación es conocer en todo instante la orientación del vehículo respecto a un marco de referencia dado (Wu et al. 2015). Para describir y caracterizar matemáticamente la orientación relativa entre marcos de referencia se utilizan diversas formas denominadas parametrizaciones, cuyos valores numéricos son actualizados permanentemente por los algoritmos de navegación. Las parametrizaciones más utilizadas para determinar la orientación de un cuerpo son:

- Matriz de Cosenos Directores.
- Ángulos de Euler.
- Cuaterniones.

#### Ángulos de Euler y matriz de cosenos directores

Los ángulos de Euler constituyen la forma más intuitiva de expresar la orientación de un vehículo. Se llaman alabeo (*roll*), cabeceo (*pitch*) y rumbo (*yaw*). Se refieren a la rotación sobre cada eje del marco de referencia. Se expresan en radianes o grados (Yanzapanta y David 2016).

En la figura se muestran los ángulos de Euler usados para describir la orientación de un objeto en tres dimensiones.

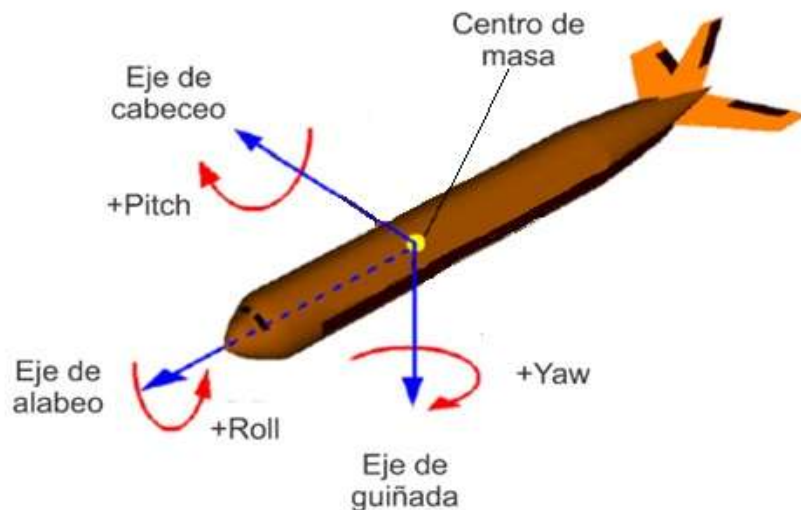


Figura 7: Ángulos de alabeo ( $\theta$ ), cabeceo ( $\phi$ ) y rumbo ( $\psi$ )

La matriz de cosenos directores tiene su base teórica en el álgebra lineal. Es una matriz cuadrada, ortonormal, que sirve para transformar un vector expresado en un marco de referencia, en otro marco específico, mediante la multiplicación habitual de matrices. Cada elemento de la matriz es una función trigonométrica de uno o varios ángulos de

Euler. En el campo de la navegación, tiene su origen en la composición de rotaciones de un marco de referencia a otro.

Cualquier matriz de cosenos directores  $C$  debe cumplir con la condición:

$$C_i^T C_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

A partir de las Matrices de Cosenos Directores se pueden obtener los Ángulos de Euler calculando (Shin y El-Sheimy 2003):

$$\text{roll: } \varphi = \text{atan2}(C_{32}, C_{11})$$

$$\text{pitch: } \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{C_{31}}{\sqrt{1 - C_{31}^2}}\right)$$

$$\text{yaw: } \psi = \text{atan2}(C_{21}, C_{11})$$

### **Cuaterniones**

Un cuaternión está compuesto por cuatro parámetros

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$$

Se puede expresar como un número hipercomplejo porque está compuesto por una componente real  $q_0$ , y tres componentes imaginarios,  $q_1, q_2$  y  $q_3$ , como sigue: (Guerrero-Castellanos et al. 2013)

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

La orientación de cualquier cuerpo rígido puede ser representada por medio de cuaterniones. Es la forma de representación más abstracta de la orientación, en cambio, es la más eficiente en términos numéricos, dado que las operaciones sobre cuaterniones son algebraicas, tal como ocurre con los números complejos, y se evita el cálculo de funciones trigonométricas.

Debe cumplir la condición de normalidad:  $\|q\| = 1$ . (Alpay et al. 2015)

A continuación se muestran las características principales de los cuaterniones descritas por (Alpay et al. 2015).

- ✓ Ofrecen una parametrización muy eficaz de la orientación debido que sólo tienen un parámetro redundante.
- ✓ Importantes ventajas computacionales.
- ✓ No presentan singularidades para ningún valor de sus parámetros que deba resolverse con información suplementaria.

Como desventaja se puede observar cierta dificultad para interpretar geoméricamente el sentido de sus parámetros.

#### **1.1.11 Estimador de orientación**

En la navegación la medición precisa de la orientación con respecto a un sistema de referencia inercial es una necesidad primordial, ya que esta auxilia al piloto para mantener el vuelo, así como a su navegación, sistema conocido como horizonte artificial; en el caso de los vehículos tripulados. Para el caso de los vehículos autónomos se debe de conocer la orientación a cada instante, para que el control pueda computar las señales que se enviarán a los actuadores con el fin de mantener una orientación deseada (Wu et al. 2015)

Un estimador de orientación o AHRS por sus siglas en inglés (*Attitude and Heading Reference System*), es un sistema cuya función principal es estimar la orientación de un de un vehículo con respecto a un sistema de referencia inercial.

Los AHRS generalmente están compuestos por dos clases de sensores: sensores inerciales (acelerómetros y giróscopos) y sensores magnéticos (magnetómetros), midiendo aceleración lineal, velocidad angular e intensidad del campo magnético respectivamente. Los sensores son de tres ejes cada uno y se encuentran dispuestos de manera ortogonal, de tal forma que los ejes sensibles de los sensores coinciden con los ejes de rotación del vehículo donde es colocado. (2) Los sistemas AHRS no solo limitan su uso a vehículos aéreos, sino también pueden ser empleados en vehículos terrestres, acuáticos, submarinos y espaciales; de hecho pueden ser usados sobre cualquier cuerpo rígido en el que se desee conocer su orientación, por esta razón se comienza a trabajar con estos sistemas en otras áreas como la robótica, biomecánica, realidad virtual y videojuegos. (Guerrero-Castellanos et al. 2013)

Se han reportado varios trabajos que han propuesto soluciones para estimar orientación para vehículos autónomos.

El autor de este trabajo asumió la implementación de (Watson 2013) por utilizar expresamente las mediciones inerciales en presencia de magnetómetros, y por ser una solución robusta para la estimación de los ángulos de Euler, mediante cuaterniones.

#### **1.1.12 Descripción de los sensores inerciales**

Los dispositivos que miden velocidad, aceleración, o velocidad angular de un cuerpo con respecto a características en el ambiente no son considerados sensores inerciales

(Groves 2013). Muchos tipos de acelerómetros y giróscopos miden la fuerza específica y la velocidad angular respectivamente, a lo largo de un solo eje.

Todos estos sensores inerciales han tenido un progreso significativo en los últimos tiempos ya que cada vez son más utilizados en los sistemas de navegación para vehículos autónomos. Ellos pueden ser agrupados en tres categorías por precio: estratégicos, tácticos y comerciales (Groves 2013). A continuación, se brinda una descripción de los sensores por categorías.

- Los INS con sensores inerciales de categoría estratégica pueden costar más de un millón USD y ofrecer una solución de navegación con un error menor de 1.8 km en un día (Groves 2013).
- Los que poseen la categoría táctica experimentan un error máximo de posición horizontal de 1.5 km en la primera hora de operación, estos son usados en aerolíneas comerciales y en aeronaves militares a nivel mundial, y poseen un costo de alrededor de 100000 USD con una dimensión estándar de 178x178x249 mm (Groves 2013).
- Los sensores con categoría comercial, pueden ser usados para proporcionar una solución de navegación inercial independiente, útil solamente durante varios minutos. Sin embargo, se puede obtener una solución de navegación con exactitud a largo plazo, integrando estos dispositivos con sistemas de posicionamiento, tal como GPS (*Global Position System*). Estos sistemas tienen un costo típico entre 5,000 y 20,000. (Groves 2013) y poseen como principal deficiencia la alta tasa de sesgos, derivas y factor escala en las mediciones.

### **1.1.13 Consideraciones sobre los sistemas de navegación inercial**

Tomando como referencia a (España 2010) relacionamos las ventajas y desventajas reconocidas por este autor en un sistema de navegación.

Ventajas:

- Producen información de los parámetros de navegación a muy alta tasa de muestreo.
- Sus medidas son no interferibles y no requieren de estaciones o puntos de referencia externos.
- Utiliza información accesible en todo instante y en todo punto (sobre y fuera del planeta) con calidad independiente del medio donde se mueva el vehículo.



## Desventajas

- Necesita conocer la orientación y la posición iniciales del vehículo.
- La adquisición del rumbo inicial requiere la inmovilidad del vehículo durante el proceso llamado de “girocompás”, que puede durar algunos minutos, y de giróscopos de resolución suficiente como para medir la velocidad angular de la Tierra ( $15^\circ/\text{hr}$ ).
- Los errores de medida en los instrumentos inerciales y en los parámetros de navegación iniciales inducen errores que crecen polinomialmente con el tiempo.
- Requieren de la actualización periódica de los parámetros de navegación con mediciones absolutas.

### 1.2 Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

El sistema de posicionamiento global (GPS) es un sistema de transferencia de tiempo y radio posicionamiento basado en espacio, el cuál fue originalmente desarrollado como el sistema de posicionamiento de las fuerzas militares en 1973 (GPS Navstar).

El GPS se descompone en tres segmentos básicos (Pozo-Ruz et al. 2000):

- Segmento espacio: Es de responsabilidad militar y está formado por 24 satélites con una órbita de 26560 Km de radio y un periodo de 12 h.
- Segmento control: Es de responsabilidad militar y está formado por cinco estaciones monitoras encargadas de mantener en órbita los satélites y supervisar su correcto funcionamiento, tres antenas terrestres que envían a los satélites las señales que deben transmitir y una estación experta de supervisión de todas las operaciones.
- Segmento usuario: Formado por las antenas y los receptores situados en tierra. Los receptores, a partir de los mensajes que provienen de cada satélite visible, calculan distancias y proporcionan una estimación de posición y tiempo.

El GPS provee información de posición tridimensional, velocidad y tiempo (PVT) a un usuario en cualquier lugar (Tierra, mar, aire y espacio) del planeta en cualquier momento. Las determinaciones de la posición son basadas en mediciones de tiempo de tránsito de señales de radio de por lo menos 4 satélites. Normalmente el GPS contiene características las cuales limitan la exactitud completa de los servicios solamente a

usuarios autorizados y tiene protección de engaños (imitaciones hostiles). (BAUTISTA 2002).

Existen otros dos sistemas de navegación global por satélite. El Sistema de navegación global por satélite europeo Galileo, que encuentra aún en fase experimental y el ruso GLONASS que, a pesar de estar funcionando con sus 24 satélites en órbita, necesita de la interoperabilidad con el GPS para alcanzar cobertura global.

Se asume el sistema de posicionamiento global GPS como medida referencia absoluta, porque es el más difundido y el que tiene alcance global. Además, es compatible con la tecnología utilizada en la investigación.

### **1.2.1 Funcionamiento del GPS**

El cálculo de la posición depende básicamente de dos parámetros que son la posición del satélite y el reloj del mismo. Dicha información es recogida en la señal enviada por el satélite hasta el receptor, siendo el proceso de cálculo el siguiente (3):

1. La situación de los satélites es conocida por el receptor con base en las efemérides, parámetros que son transmitidos por los propios satélites.
2. El receptor GPS mide su distancia de los satélites, y usa esa información para calcular su posición. Esta distancia se mide calculando el tiempo que la señal tarda en llegar al receptor. Conocido ese tiempo y basándose en el hecho de que la señal viaja a la velocidad de la luz (salvo algunas correcciones que se aplican), se puede calcular la distancia entre el receptor y el satélite.
3. Cada satélite indica que el receptor se encuentra en un punto en la superficie de la esfera con centro en el propio satélite y de radio la distancia total hasta el receptor.
4. Son necesarios al menos cuatro satélites para obtener la posición, con tres satélites somos capaces de calcular la posición en tres dimensiones, mientras que el cuarto nos permite eliminar los errores de sincronismo.

### **1.2.2 Fuentes de error del GPS**

La información procedente de cada satélite que viaja en una señal puede verse afectada por distintas fuentes de error:

- Efectos atmosféricos
- Efectos multitrayecto
- Errores de efemérides y reloj
- Errores debidos a la relatividad

- Disponibilidad selectiva

Estos errores que degradan la precisión del servicio, por lo que han hecho que surjan sistemas de mejora para obtener mayores prestaciones.

### **1.3 Sistemas de navegación Integrada**

Se conoce como sistemas de navegación integrada a la fusión de los datos de diferentes fuentes, tanto sensores inerciales como fuentes externas, con el objetivo de aprovechar las ventajas de cada uno para complementarlas con las desventajas del otro. La fusión se realiza con el propósito de mejorar la calidad de la estimación, aumentar la disponibilidad y continuidad de los datos, y dar una mayor robustez al sistema de navegación. (Quan et al. 2015)

Algunas estrategias de sistemas de navegación integrada que pueden encontrarse, pueden estar constituidas por los siguientes sensores:

- ✓ Instrumentos inerciales, GPS.
- ✓ Instrumentos inerciales, magnetómetro, GPS.
- ✓ Instrumentos inerciales, GPS, sensores solares.
- ✓ Instrumentos inerciales y baro-altímetro.
- ✓ Instrumentos inerciales y sonares.
- ✓ Instrumentos inerciales y Cámaras.

La manera adecuada de resolver el problema de fusión de datos de la navegación integrada es la estimación no lineal de sistemas dinámicos haciendo uso de técnicas de observación y estimación de estados; sin embargo, debido a la complejidad del diseño de este tipo de sistemas, tradicionalmente se ha recurrido a extensiones del filtro de Kalman. (Díaz 2010)

A continuación, se presenta un diagrama de un sistema de navegación integrada.

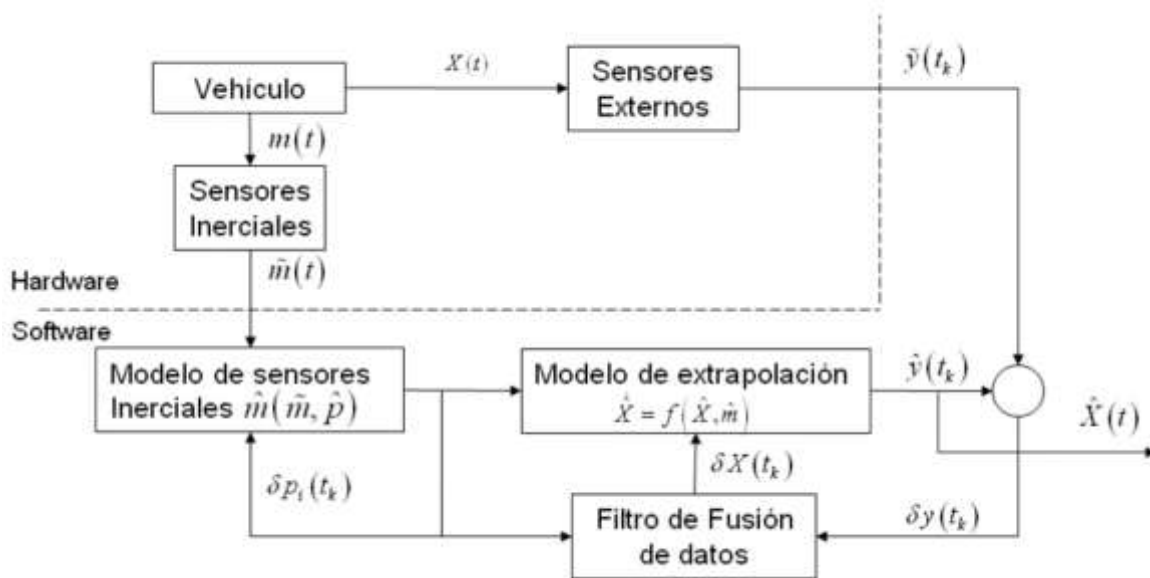


Figura 8: Esquema de un Sistema de Navegación Integrada. (Díaz 2010)

En la figura anterior se presenta un esquema de un sistema de navegación integrada, donde se dividen los elementos en dos conjuntos, hardware y software. La investigación se enfocó en la parte del software. Los elementos del software son los algoritmos, los modelos de los sensores inerciales y externos, el modelo de extrapolación, donde también se resuelven las ecuaciones de cinemática del vehículo, y finalmente un filtro de fusión de datos que se utiliza para fusionar la información provista tanto por los sensores inerciales como los externos. (Díaz 2010)

Para una mejor comprensión de la figura anterior, se describen las variables usadas.

- ✓  $X(t)$  es el vector de estado de la dinámica del vehículo, variables de navegación o los errores de los sensores.
- ✓  $\tilde{y}(t_k)$  es la medición provista por los sensores externos en el instante  $t_k$ .
- ✓  $m(t)$  es la magnitud inercial vectorial que va a ser medida por los sensores inerciales resultando  $\tilde{m}(t)$ .
- ✓  $\tilde{m}(t)$  es la expresión del modelo matemático de la medición que será utilizado junto al modelo de extrapolación y el filtro de fusión de datos para estimar el vector de estados  $X(t)$ .
- ✓  $\hat{y}(t_k)$  es la salida del bloque del modelo de extrapolación que será comparada con la medición de los sensores externos  $\tilde{y}(t_k)$ , obteniéndose  $\delta y(t_k)$ .
- ✓  $\delta y(t_k)$  es la entrada del filtro de fusión de datos.

$\delta X(t_k)$  y  $\delta p_i(t_k)$  son errores en las variables de navegación y los parámetros del error de medición respectivamente, estos valores son la salida del filtro de Kalman que serán

utilizados para corregir el modelo de los sensores inerciales y el modelo de extrapolación, cerrando así el lazo de realimentación.

#### 1.4 Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas para implementar un tipo de estimador Predictor-Corrector es óptimo en el sentido de minimizar la covarianza del error de estimación bajo el cumplimiento de ciertas condiciones (4), (Hartikainen, Solin y Särkkä 2011). Sus aplicaciones más inmediatas han sido para el manejo de los sistemas dinámicos, como los procesos industriales continuos, y para la navegación inercial. (Ribeiro 2004)

Para estas aplicaciones, no siempre es posible o deseable medir cada variable que se quiere controlar, y el filtro de Kalman provee un medio para inferir la información perdida de las medidas indirectas y ruidosas (Grewal y Andrews 2001).

Aborda el problema general de tratar de estimar el estado  $x \in \mathbb{R}^n$  de un proceso de tiempo discreto que está gobernado por una ecuación diferencial lineal. A continuación, se presentan las ecuaciones del proceso y la ecuación de medida:

$$\begin{cases} x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + w_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + v_k \end{cases}$$

Donde:

$x_k$  es la variable de estado del proceso que se desea estimar.

$z \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado de observación o medición.

$u_k$  es la función forzante del proceso.

$A_k, B_k$  y  $H_k$  son las matrices que definen la dinámica del sistema.

$w_k$  representa el ruido del proceso (ruido blanco).

$v_k$  representa el ruido de observación o medición (ruido blanco).

$p(w) \sim N(0, Q)$  distribución de probabilidad normal del ruido del proceso.

$p(v) \sim N(0, R)$  distribución de probabilidad normal del ruido de medición.

$Q_k$  matriz de covarianza del ruido de proceso.

$R_k$  matriz de covarianza del ruido de medición.

Y se asumen las siguientes condiciones.

$E[x_0] = x_0$ : Condición inicial de  $x_k$ ,

$E[x_0, w_k] = 0 \forall k$  independencia,

$E[x_0, v_k] = 0 \forall k$  independencia,

$E[w_k, v_j] = 0 \forall k$  independencia entre los ruidos de proceso y de medición,

$E[x_0, x_0] = P \forall k$  Condición inicial de  $P$ . (Grewal y Andrews 2001)

#### 1.4.1 Algoritmo de filtro de Kalman

El algoritmo de filtro de Kalman, se implementa de manera recursiva mediante dos tipos de ecuaciones, el primer tipo se denomina "Predicción" y el segundo tipo "Actualización". Las ecuaciones de predicción son responsables de la estimación hacia delante en el tiempo del vector de estado actual, y la matriz de covarianza del error de estimación para obtener sus estimaciones a priori, antes de las observaciones. Las ecuaciones de actualización de mediciones son responsables de la realimentación incorporando las nuevas mediciones, las observaciones, en las estimaciones a priori para obtener una estimación a posteriori mejorada. (Grewal y Andrews 2001)

Con condiciones iniciales  $x_0, P_0$ .

##### Ecuaciones de Predicción

Para la estimación del estado hacia delante se utiliza la ecuación:

$$\hat{x}_{\bar{k}} = A\hat{x}_{\bar{k}-1} + Bu_k$$

estimando la covarianza del error hacia delante:

$$P_{\bar{k}} = AP_{k-1}A^T + Q$$

##### Ecuaciones de Actualización

Se toma una medición  $z_k$  del instante  $k$ , luego se calcula la ganancia de Kalman  $K_k$  mediante la ecuación

$$K_k = P_{\bar{k}}H^T (HP_{\bar{k}}H^T + R)^{-1}$$

Posteriormente se hace la estimación de los estados  $\hat{x}_k$  y se actualiza con la medición

$z_k$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K_k (z_k - H\hat{x}_{\bar{k}})$$

y se actualiza la matriz de covarianza del error  $P_k$

$$P_k = (I - K_kH)P_{\bar{k}}$$

### 1.4.2 Filtro Extendido de Kalman

El filtro de Kalman resuelve el problema de estimar el vector de estado de un proceso discreto regido por ecuaciones lineales estocásticas en diferencia. En el caso que el algoritmo esté definido por ecuaciones no lineales se puede recurrir al filtro de Kalman Extendido, este es el resultado obtenido cuando el Filtro de Kalman linealiza las estimaciones respecto a la media y a la covarianza del estado actual. (Fujii 2013)

### 1.4.3 Algoritmo de Filtro Extendido de Kalman

Básicamente el funcionamiento del Filtro de Kalman Extendido es el mismo que el Filtro de Kalman lineal. A continuación, se presentan las ecuaciones de actualización del mismo, donde se ha reemplazado  $\hat{x}_{\bar{k}} = \tilde{x}_k$  para seguir con la nomenclatura usada en el Filtro de Kalman.

Con condiciones iniciales  $x_0, P_0$ .

#### Ecuaciones de Predicción

Para la proyección del estado hacia delante se utiliza la ecuación:

$$\hat{x}_{\bar{k}} = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0)$$

Proyectando la covarianza del error hacia delante:

$$P_{\bar{k}} = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T$$

#### Ecuaciones de Actualización

Cálculo de la ganancia de Kalman

$$K_k = P_{\bar{k}} H^T (H_k P_{\bar{k}} H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1}$$

Actualización de los estados con la medición  $z_k$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K_k (z_k - h(\hat{x}_{\bar{k}}, 0))$$

y se actualiza la matriz de covarianza del error  $P_k$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{\bar{k}}$$

Una característica importante del Filtro de Kalman Extendido es que el Jacobiano  $H_k$  en la ecuación de la ganancia de Kalman  $K_k$  sirve para corregir la propagación o destacar solamente las componentes relevantes de información de medición. En el caso de no existir un mapeo uno a uno entre las mediciones  $z_k$  y el vector de estado  $x_k$ , el Jacobiano afecta la ganancia de Kalman de manera de destacar solo la porción de la innovación  $z_k - h(\hat{x}_{\bar{k}}, 0)$  que no afecta al vector de estado a estimar. En el caso que para todas las

mediciones no hay un mapeo uno a uno entre las mediciones  $z_k$  y el vector de estado  $x_k$  través de  $h$ , como es de esperarse el filtro diverge rápidamente por tratarse un proceso no observable (Benzerrouk 2014)

Los errores estimados en los parámetros de navegación pueden ser realimentados a la mecanización, mediante el método de regeneración (*feedback*), o añadidos a la salida, mediante el método hacia delante (*feedforward*). En el método hacia delante (*feedforward*) el sistema inercial funciona como si no tuviese ayuda, o sea, no tiene conocimiento del filtro o de los datos externos (Maybeck 1994). En este la mecanización puede experimentar un crecimiento del error sin límites, lo que provoca infinitas observaciones del error entregadas al filtro de Kalman. Esto causa un problema al filtro lineal, ya que solo se permiten pequeños errores debido al proceso de linealización (Sukkarieh et al. 2000). Por lo tanto, el método de regeneración (*feedback*) es óptimo para sistemas de navegación inercial de bajo costo.

### **1.5 Principales resultados obtenidos en investigaciones precedentes**

La Navegación Integrada INS/GPS ha sido objeto de estudio para numerosos centros de investigación, debido al auge que han tomado los vehículos autónomos y a su inevitable revolución tecnológica. A continuación, se mencionan las principales investigaciones que fueron útiles en el estudio de estado de arte de la investigación.

En 2001, Eun-Hwuan Shin publica su tesis de maestría titulada “Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications” donde plantea un filtro extendido de Kalman, del cual se tomó parte de la estrategia para la fusión INS/GPS. También cabe destacar publicaciones como el libro “Fundamentos de la Navegación Integrada” publicado en 2010 por Martín España, miembro de la Asociación Argentina de Control Automático. Esta publicación permitió la comprensión del funcionamiento de los sistemas de navegación integrada. Poniendo en práctica los conocimientos del libro anteriormente planteado y tutorado por el autor del mismo, en 2012 Gonzalo Castillo presenta su tesis de maestría titulada “Navegación Integrada INS-GPS: Aplicación a un SAR aerotransportado”, permitiendo en la investigación la comprensión de la mecanización clásica de un sistema de navegación inercial. En 2013 el Lic. Andrés Mauricio Castro Pescador publicó su tesis de maestría titulada: “*Fusión sensorica INS/GPS para navegación en plataformas móviles.*” donde explica los marcos de referencia, sus ventajas y desventajas y el desarrollo de los algoritmos de mecanización del INS en cada uno de ellos. En mayo del mismo año Matthew Watson publica un



artículo titulado “*The Design and Implementation of a Robust AHRS for Integration into a Quadrotor Platform*” del que se implementó el estimador de orientación.

En 2014 Roberto Quesada Navarro publica su trabajo de diploma titulado “*Acondicionamiento de las mediciones de sensores inerciales de bajo costo con fines de navegación*”; y Alain Sebastián Martínez Laguardia publica su tesis doctoral titulada “*Model aided Inertial Navigation for AUV*”. Ambas publicaciones abordan dentro del contenido de la investigación, los sistemas de navegación integrada, enfocándose en los sensores inerciales de bajo costo.

A partir de las investigaciones anteriores se tomaron sus fundamentos teóricos y prácticos para la realización de la presente investigación.

## **1.6 Herramientas y Tecnologías utilizadas en la implementación del algoritmo**

### **1.6.1 Herramientas**

#### **MATLAB**

Se utiliza **MATLAB** (abreviatura de **MATrix LABoratory**, "laboratorio de matrices") porque es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux. Entre sus prestaciones básicas se encuentran la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos. (5). es por esta razón que MATLAB cumple con todos los requisitos necesarios para la implementación de cualquier algoritmo. Además, MATLAB cuenta con disímiles funciones implementadas, con énfasis en las funciones estadísticas, que serán utilizadas para la validación. Al tener los datos generados por el algoritmo, con la función anteriormente mencionada se le pueden realizar pruebas estadísticas de comparación de medias de dos poblaciones, utilizando para esto datos reales tomados de experimentos realizados.

### **1.6.2 Tecnologías**

#### **Lenguaje M**

M es el lenguaje de programación propio de MATLAB. Este es interpretado, y puede ejecutarse tanto en el entorno interactivo, como a través de un archivo de script (archivos \*.m). Permite operaciones de vectores, matrices y funciones.

## 1.7 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se realizó un estudio de los fundamentos teóricos sobre los sistemas de navegación inercial para su utilización en el estudio de los fondos marinos.

A través del análisis realizado se pudo evidenciar que:

- ✓ Los sistemas de navegación inercial han sido objeto de estudio y aplicación por los países de gran desarrollo económico, estos fundamentalmente con fines militares; también América Latina ha desarrollado en menor escala estudios y aplicaciones de este tipo, en Cuba se han realizado investigaciones en torno al desarrollo de los algoritmos de navegación, fundamentalmente en la Universidad Central de Las Villas, y el Centro de Investigación y Desarrollo Naval.
- ✓ Existen varios marcos de referencia para expresar las ecuaciones de navegación, y los algoritmos de navegación. En la actualidad es una tendencia implementar los algoritmos en el marco de navegación.
- ✓ Se caracterizaron los principales conceptos de navegación integrada, mecanización de un INS, filtro de Kalman y sistemas de navegación por satélite para estimación de parámetros de navegación.

## CAPITULO 2: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE SOLUCIÓN

### Introducción

En este capítulo se presenta la implementación del algoritmo de navegación integrada INS/GPS con filtro extendido de Kalman, para la obtención de parámetros de navegación con sensores inerciales de bajo costo.

### 2.1 Presentación de solución

Para dar solución al problema de la investigación se implementa un algoritmo de navegación integrada INS/GPS con filtro extendido de Kalman, utilizando una estrategia de realimentación directa. Se utilizan dos fuentes de datos, una es el GPS y la otra es la mecanización del INS con sensores de bajo costo. Las mediciones obtenidas son procesadas por el filtro de Kalman y realimentan a la mecanización. Se utiliza dicho método porque es óptimo para sistemas de navegación inercial de bajo costo (Sukkarieh et al. 2000).

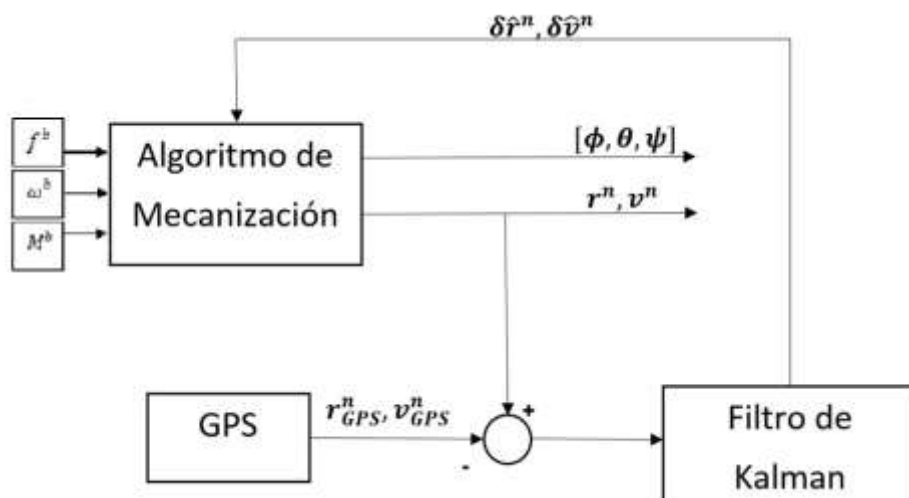


Figura 9: Esquema del método de fusión INS/GPS. Fuente: elaboración propia.

### 2.2 Propuesta de algoritmo de mecanización del INS para la solución del problema

En el Capítulo 1 se explicaron las mecanizaciones de sistemas de navegación inercial en diferentes marcos de referencia, se decidió utilizar la del marco de navegación propuesta por (González y Rubio 2004) realizando cambios en la manera de tratar la orientación. Se sustituye la integración de las velocidades angulares del giróscopo por

un estimador de orientación, por sus siglas en inglés (AHRS) propuesto por (Watson 2013) para una mejor estimación de los ángulos. A continuación, se muestra el esquema que describe la mecanización propuesta.

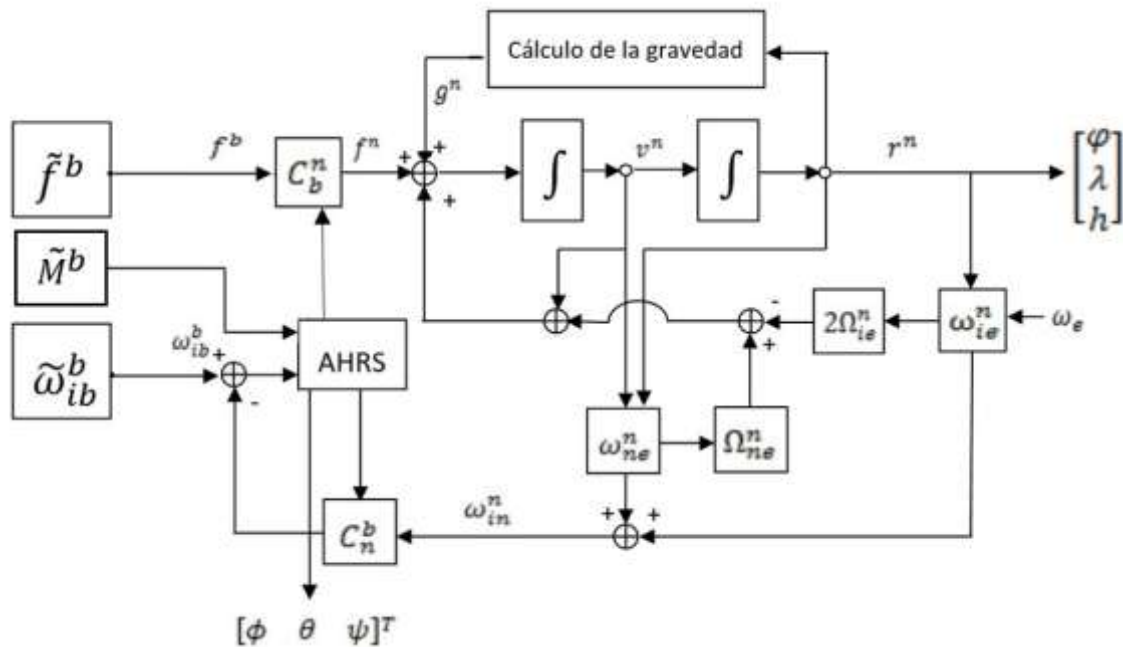


Figura 10: Mecanización de la propuesta de solución. Fuente: elaboración propia.

Como se muestra en la figura 10, el estimador de los parámetros de orientación genera, entre otros valores, la matriz de cosenos directores para convertir del marco del cuerpo, al marco de navegación, la aceleración brindada por el sensor. Luego a este valor se le suma la corrección de la gravedad, y la aceleración de Coriolis para integrarlo y obtener la velocidad, y volver a hacer lo mismo para obtener la posición, que será expresada en latitud, longitud y altura. Por otro lado, el estimador de orientación recibe el valor de aceleración angular brindado por el giróscopo, y devuelve los ángulos de orientación (Roll, Pitch, y Yaw).

### 2.2.1 Descripción del algoritmo de mecanización del INS

#### Entradas del algoritmo:

- Aceleración en X, Y, Z expresada en (m/s<sup>2</sup>).
- Velocidad Angular en X, Y, Z expresada en (rad/s).
- Magnetómetros en X, Y, Z.

**Salidas:**

- Latitud expresada en (grados).
- Longitud expresada en (grados).
- Altura expresada en (metros).
- Velocidad en X, Y, Z expresada en (m/s).
- Ángulo de alabeo (grados).
- Ángulo de cabeceo (grados).
- Ángulo de rumbo (grados).

1: Obtener las mediciones de los sensores inerciales.

2: Realizar el filtrado de los datos de los sensores inerciales.

**Para** cada medición, **Hacer**

3: Calcular la orientación mediante el Estimador de Orientación y Rumbo (AHRS).

4: Transformar las aceleraciones del marco del cuerpo al marco de navegación.

5: Integrar las aceleraciones para obtener velocidad en X, Y, Z.

6: Integrar las velocidades para obtener la posición en Latitud, Longitud y Altura.

7: Ejecutar el filtro extendido de Kalman para corregir el error.

8: Realimentar el INS con el error de posición y de velocidad.

**Fin**

**2.3 Descripción del estimador de Orientación y Rumbo (AHRS)**

Para estimar la orientación, en términos de ángulos de Euler, se utilizó un estimador independiente debido a la naturaleza ruidosa de las mediciones de los giróscopos. Integrar directamente la velocidad angular dificulta la obtención de la orientación. Realizando un filtrado de las mediciones, donde se utilizan las matrices diagonales que representan la varianza del ruido esperado en el estado de predicción esperado y la medición del vector z. Para la implementación se definieron como:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el proceso gaussiano y la medición del ruido con covarianzas  $Q_k$  y  $R_k$  se define que

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}) + N(0, Q_k)$$

$$\mathbf{z} = h(\mathbf{x}_k) + N(0, R_k)$$

Las variables del vector de estado usado se traducen en el cuaternión de la estimación de orientación y tres componentes del sesgo del giróscopo, como se muestra a continuación.

$$\mathbf{x} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \omega_{xb} \ \omega_{yb} \ \omega_{zb}]^T$$

En esta implementación, el modelo de predicción representa una función que describe la próxima estimación de orientación en términos de la anterior estimada y el vector de proporción angular del giróscopo. El próximo cuaternión se halla simplemente a través de integración numérica usando

$$q_k = q_{k-1} + dt * \dot{q}_k$$

Donde

$$\dot{q}_\omega(q, \omega) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x - \omega_{xb} \\ \omega_y - \omega_{yb} \\ \omega_z - \omega_{zb} \end{bmatrix}$$

Los componentes del sesgo del giróscopo no se alteran durante la etapa de predicción. Esto permite que  $f$  se construya como:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) = \begin{bmatrix} q_0 + \frac{dt}{2} * (-q_1(\omega_x - \omega_{xb}) - q_2(\omega_y - \omega_{yb}) - q_3(\omega_z - \omega_{zb})) \\ q_1 + \frac{dt}{2} * (q_0(\omega_x - \omega_{xb}) - q_3(\omega_y - \omega_{yb}) - q_2(\omega_z - \omega_{zb})) \\ q_2 + \frac{dt}{2} * (-q_3(\omega_x - \omega_{xb}) - q_0(\omega_y - \omega_{yb}) - q_1(\omega_z - \omega_{zb})) \\ q_3 + \frac{dt}{2} * (q_2(\omega_x - \omega_{xb}) - q_1(\omega_y - \omega_{yb}) - q_0(\omega_z - \omega_{zb})) \\ \omega_{xb} \\ \omega_{yb} \\ \omega_{zb} \end{bmatrix}$$

Luego se calcula el Jacobiano para producir la matriz F

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{dt}{2}(\omega_x - \omega_{xb}) & -\frac{dt}{2}(\omega_y - \omega_{yb}) & -\frac{dt}{2}(\omega_z - \omega_{zb}) & \frac{dt}{2}q_1 & \frac{dt}{2}q_2 & \frac{dt}{2}q_3 \\ \frac{dt}{2}(\omega_x - \omega_{xb}) & 1 & -\frac{dt}{2}(\omega_z - \omega_{zb}) & \frac{dt}{2}(\omega_y - \omega_{yb}) & -\frac{dt}{2}q_0 & -\frac{dt}{2}q_3 & \frac{dt}{2}q_2 \\ \frac{dt}{2}(\omega_y - \omega_{yb}) & \frac{dt}{2}(\omega_z - \omega_{zb}) & 1 & -\frac{dt}{2}(\omega_x - \omega_{xb}) & \frac{dt}{2}q_3 & -\frac{dt}{2}q_0 & -\frac{dt}{2}q_1 \\ \frac{dt}{2}(\omega_z - \omega_{zb}) & -\frac{dt}{2}(\omega_y - \omega_{yb}) & \frac{dt}{2}(\omega_x - \omega_{xb}) & 1 & -\frac{dt}{2}q_2 & \frac{dt}{2}q_1 & -\frac{dt}{2}q_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3.1 Ecuaciones del filtro para el estimador de orientación

A continuación, se presentan las ecuaciones utilizadas en el filtro extendido de Kalman en cada una de sus etapas.

#### Predicción

Predicción del estado estimado  $x_k = f(x_{k-1}, u)$

Predicción de la covarianza estimada  $P = FPF' + Q$

#### Actualización

Medición residual  $y = z - h(x_k)$

Covarianza residual  $S = HPH' + R$

Ganancia de Kalman  $K = PH'S^{-1}$

Actualización del estado estimado  $x_k = x_k + K_y$

Actualización de la covarianza estimada  $P = (I - KH)P$

Con  $F = \frac{\partial f}{\partial x}$  y  $H = \frac{\partial h}{\partial x}$ . Se representa la matriz de identidad.

El cuaternión estimado luego se convierte en los valores de los ángulos de orientación roll, pitch y yaw usando

$$\begin{bmatrix} \text{pitch} \\ \text{roll} \\ \text{yaw} \end{bmatrix} (q) = \begin{bmatrix} \text{atan2}(2(q_0q_1 + q_2q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)) \\ \text{arcsen}(2(q_0q_2 - q_3q_1)) \\ \text{atan2}(2(q_0q_3 + q_1q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)) \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 Descripción del algoritmo del estimador de orientación

#### Entradas del algoritmo:

- Aceleraciones.
- Velocidades angulares.
- Magnetómetros.
- Vector de estados.
- Matriz de covarianza del error.
- Tiempo de muestreo.

#### Salidas:

- Cuaternión que describe la orientación del vehículo.

- 1: Normalizar las mediciones filtradas y las originales.
- 2: Definir la matriz de covarianza del error en el proceso.
- 3: Definir la matriz de covarianza en las mediciones.
- 5: Definir el vector de observaciones z.
- 6: Normalizar el cuaternión.
- 7: Estimar la matriz F mediante el cálculo del Jacobiano.
- 8: Estimar la matriz de covarianza del error.
- 9: Construir la matriz de rotaciones basado en cuaterniones.
- 10: Estimar la matriz H mediante el cálculo del Jacobiano.
- 11: Actualizar el estado.
- 12: Actualizar la matriz de covarianza.

**Fin**



## 2.4 Descripción del Filtro Extendido de Kalman

El filtro de Kalman simple, es un modelo lineal y no coincide con el modelo conformado por las ecuaciones del algoritmo de mecanización que se utilizará en la investigación que son no lineales (Grewal y Andrews 2001). Por esta razón el filtro de Kalman no se implementará directamente para estimar el vector de estados, sino que se recurrirá a la variante Filtro Extendido de Kalman.

### Análisis de perturbaciones

Las mediciones hechas con sensores inerciales de bajo costo tienen niveles de error que constituyen perturbaciones, de modo que se puede descomponer la medición realizada en el valor real del parámetro y el error de medición. Estos errores aparecen en la mecanización en forma de perturbaciones, en el momento de calcular la velocidad del vehículo y la posición.

Se trata con la propuesta de encontrar un modelo de error para las perturbaciones, de modo que sea útil para la implementación del Filtro Extendido de Kalman. (Shin y El-Sheimy 2003):

$$\hat{r}^n = r^n + \delta r^n$$

$$\hat{v}^n = v^n + \delta v^n$$

Donde  $\hat{\cdot}$  y  $\delta$  denotan el valor actual calculado y el error respectivamente.

### Dinámica del error de posición.

La dinámica de error de posición se puede obtener por perturbar la ecuación de las ecuaciones de la dinámica de las posiciones geodésicas. Puesto que las ecuaciones dinámicas de posición son funciones de posición y velocidad, las ecuaciones dinámicas del error de posición se pueden obtener usando derivadas parciales.

$$\delta \dot{r}^n = F_{rr} \delta r^n + F_{rv} \delta v^n$$

Donde

$$F_{rr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{(M+h)^2} \\ \frac{v_E \sin \varphi}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E}{(N+h) \cos^2 \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{rv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y M, N son los radios mayor y menor respectivamente, y se consideran como constantes.

### Dinámica del error de velocidad

Haciendo referencia a la ecuación de la perturbación de la velocidad, el cálculo de la ecuación de la dinámica de velocidad puede ser expresada como

$$\hat{v}^n = \hat{C}_b^n \tilde{f}^b - (2\hat{\omega}_{ie}^n + \hat{\omega}_{en}^n) \times \hat{v}^n + \gamma^n$$

Perturbando el resultado de la ecuación anterior

$$\dot{v}^n + \delta \dot{v}^n = -(2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n + 2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times (v^n + \delta v^n) + g^n + \delta g^n$$

Agrupando los términos de primer orden, la ecuación anterior se puede reducir a

$$\delta \dot{v}^n = v^n \times (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) + \delta g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v^n + f^n \times \epsilon^n + C_b^n \delta f^b$$

Completando el álgebra se puede obtener

$$(v^n \times) \delta \Omega_r = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(M+h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(N+h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2v_E \omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(M+h)^2} \end{bmatrix}$$

$$(v^n \times) \delta \Omega_v = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{M+h} & \frac{-v_E \tan \varphi}{N+h} & 0 \\ 0 & \frac{v_D}{N+h} + \frac{v_N \tan \varphi}{N+h} & 0 \\ \frac{-v_N}{M+h} & \frac{-v_E}{N+h} & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de gravedad  $g^n$ , es aproximado por el vector de gravedad normal  $[0 \ 0 \ \gamma]^T$ , y  $\gamma$  varia con la altitud. Asumiendo el modelo esférico de La Tierra y el siguiente modelo de gravedad cuadrado inverso simplificado.

$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ , donde  $\gamma_0$  es la gravedad normal en  $h = 0$ , y  $R = \sqrt{MN}$ . Perturbando la ecuación superior resultante

$$\delta \gamma = -2 \left(\frac{\gamma}{R+h}\right) \delta h$$

El error dinámico de la velocidad puede ser reescrito como

$$\delta \dot{v}^n = F_{vr} \delta r^n + F_{vv} \delta v^n + (f^n \times) \epsilon^n + C_b^n \delta f^b$$

Donde

$$F_{vr} = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cos \varphi - \frac{v_E^2}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(M+h)^2} + \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2\omega_e (v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi) + \frac{v_E v_N}{(N+h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(N+h)^2} - \frac{v_N v_E \tan \varphi}{(N+h)^2} \\ 2v_E \omega_e \sin \varphi & 0 & \frac{v_E^2}{(N+h)^2} + \frac{v_N^2}{(M+h)^2} - \frac{2\gamma}{(R+h)} \end{bmatrix}$$

$$F_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{M+h} & -2\omega_e \sin \varphi - 2 \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} & \frac{v_N}{M+h} \\ 2\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} & \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{N+h} & 2\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{N+h} \\ -2 \frac{v_N}{M+h} & -2\omega_e \cos \varphi - 2 \frac{-v_E}{N+h} & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.5 Descripción del Sistema de Navegación Integrada INS/GPS mediante filtro de Kalman

El sistema se construye mediante el aumento de la ecuación de la dinámica del error de posición, la ecuación de la dinámica del error de velocidad reescrita y la ecuación dinámica del error de orientación reescrita como sigue:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Donde  $F$  es la matriz dinámica,  $x$  es el vector de estado,  $G$  es una matriz de diseño,  $u$  es la función vectorial entrante:

$$F = \begin{bmatrix} F_{rr} & F_{rv} \\ F_{vr} & F_{vv} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \delta r^n \\ \delta v^n \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_b^n & 0 \end{bmatrix} \quad u = [\delta f^b]$$

Los elementos de  $u$  son ruido blanco, cuya matriz de covarianzas viene dada por:

$$E[u(t)u(\tau)^T] = Q(t)\delta(t-\tau)$$

donde el operador  $\delta$  denota la función delta Dirac cuya unidad es 1 / tiempo.  $Q$  es llamada la matriz de densidad espectral y tiene la forma

$$Q = \text{diag}[\sigma_{ax}^2 \quad \sigma_{ay}^2 \quad \sigma_{az}^2 \quad \sigma_{\omega x}^2 \quad \sigma_{\omega y}^2 \quad \sigma_{\omega z}^2]$$

Donde  $\sigma_a$  y  $\sigma_\omega$  son las desviaciones estándar de los acelerómetros y giróscopos respectivamente.

La derivación del filtro de Kalman se inicia a partir del modelo de proceso:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k ,$$

y la siguiente observación

$$z_k = H_k x_k + e_k ,$$

Que expresan la medida vectorial,  $z_k$ , en el instante  $t_k$  como una combinación lineal del vector estado,  $x_k$ , más un error aleatorio de medición,  $e_k$ . Las matrices de covarianza para  $w_k$  y  $e_k$  están dadas por

$$E[e_k e_i^T] = \begin{cases} R_k, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

$$E[w_k e_i^T] = 0, \forall i, k$$

La implementación del filtro de Kalman se divide en dos etapas, actualización y predicción. En el primer caso, la ganancia de Kalman  $K_k$ , se calcula primero, y luego el estado y la covarianza del error se actualizan utilizando la estimación previa,  $\hat{x}_k^-$ , y su covarianza del error,  $P_k^-$ :

$$K_k = P_k^- H_k^t (H_k P_k^- H_k^t + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

En la etapa de predicción, la estimación y su covarianza del error se proyectan a continuación:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k$$

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k \Phi_k^t + Q_k$$

La posición y la velocidad del GPS se consideran como mediciones. La formulación de la ecuación de medición se puede escribir como

$$z_k = \begin{pmatrix} r_{INS}^n - r_{GPS}^n \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{INS} - \varphi_{GPS} \\ \lambda_{INS} - \lambda_{GPS} \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix}$$

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

Dadas las inestabilidades numéricas en el cálculo de  $(H_k P_k^- H_k^t + R_k)^{-1}$  para la ganancia de Kalman,  $H_k$ , porque  $\varphi$  y  $\lambda$  se expresan en radianes y por lo tanto son valores muy pequeños. Este problema se resuelve multiplicando la primera y la segunda fila por  $(M + h)$  y  $(N + h) \cos \varphi$ , respectivamente (Shin y El-Sheimy 2003). Por lo tanto, la ecuación de medición queda de la siguiente forma:

$$z_k = \begin{pmatrix} (M + h)\varphi_{INS} - \varphi_{GPS} \\ (N + h) \cos \varphi (\lambda_{INS} - \lambda_{GPS}) \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix} H_k = \begin{bmatrix} (M + h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (N + h) \cos \varphi & 0 & 0_{3 \times 3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0_{3 \times 3} & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Y se utiliza la matriz de covarianza del error de medición siguiente

$$R_k = \text{diag}(\sigma_\varphi^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_{vn}^2 \quad \sigma_{ve}^2 \quad \sigma_{vd}^2)$$

Donde  $\sigma_\varphi^2$ ,  $\sigma_\lambda^2$  y  $\sigma_h^2$  son las desviaciones estándar de la posición en latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ) y altura ( $h$ ) y  $\sigma_{vn}^2$ ,  $\sigma_{ve}^2$  y  $\sigma_{vd}^2$  son las desviaciones estándar de la velocidad en los ejes de coordenadas North, East, Down respectivamente.

## 2.5 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se describió el algoritmo de navegación integrada INS/GPS mediante filtro extendido de Kalman propuesto.

- ✓ La implementación del algoritmo de mecanización del INS permitió obtener los parámetros de navegación a partir de datos de sensores inerciales de bajo costo.
- ✓ La implementación del estimador de orientación permitió obtener los ángulos de alabeo, cabeceo y rumbo de manera independiente, garantizando una solución eficiente.
- ✓ La implementación del filtro extendido de Kalman permitió la corrección del error en la estimación de los parámetros generados por el algoritmo de mecanización, fusionándolo con datos de referencia absoluta (GPS).

## **CAPITULO 3: PRUEBAS**

### **Introducción**

En este capítulo se realizan pruebas para evaluar el desempeño del algoritmo de navegación integrada INS/GPS. Se plantean los resultados obtenidos al ejecutar el algoritmo con datos de experimentos realizados con el vehículo submarino HRC-AUV, por parte del GARP, en el 2014. Se aplican pruebas estadísticas para evaluar los resultados obtenidos.

### **3.1 Datos experimentales utilizados**

Se dispone de un conjunto de datos obtenidos de dos experimentos realizados con el submarino HRC-AUV 400, con autopiloto con unidad de medición inercial MTI-g. Experimentado por el Grupo de Automática y Percepción de la Universidad Central de Las Villas “Marta Abreu” el en la bahía de La Habana en 2014. El Experimento cuenta con 65648 muestras que brindan valores de los acelerómetros, giróscopos, velocidades, y magnetómetros en los ejes X, Y y Z. También ofrece los valores de latitud, longitud y altura en toda la trayectoria, además de los ángulos de alabeo, cabeceo y rumbo.

### **3.2 Comparación de los ángulos con los datos del experimento**

La descripción del ángulo de alabeo estimado describe un comportamiento similar al esperado en los datos experimentales. Con pequeñas diferencias estadísticamente no significativas cuando se realiza un giro brusco. Como se muestra en la figura (11). El comportamiento del ángulo estimado se muestra en color rojo, mientras el del ángulo tomado de la referencia se muestra en color azul.

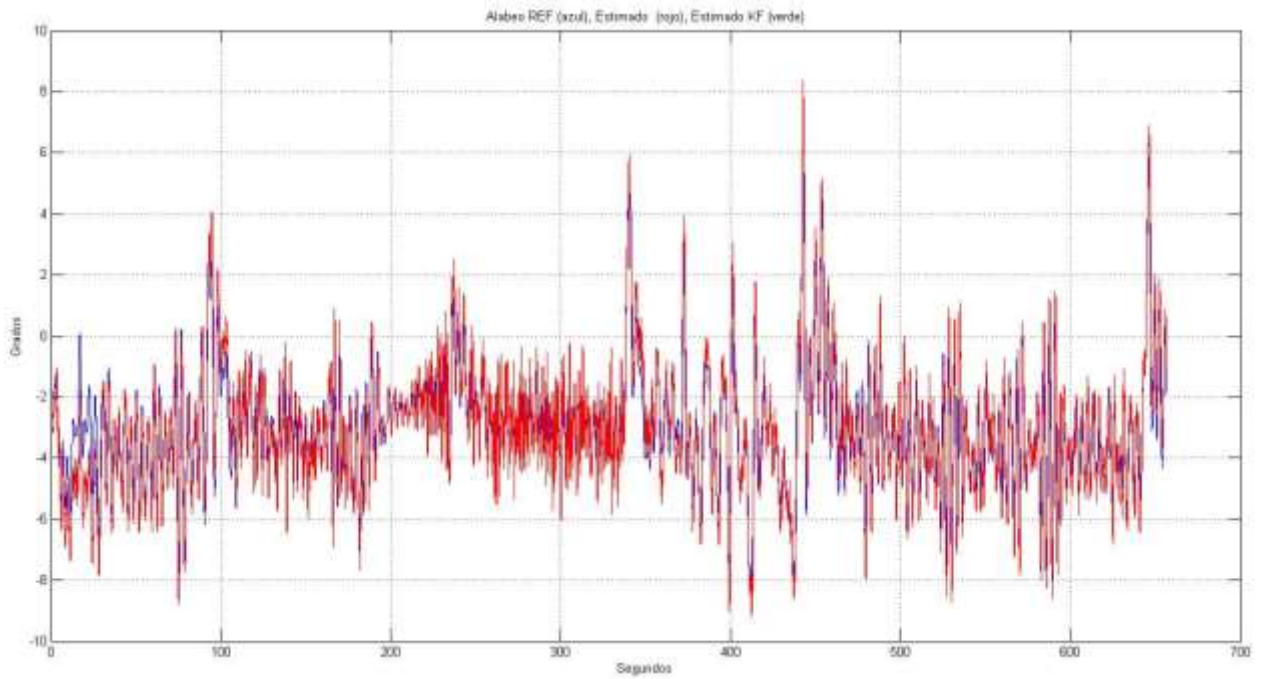


Figura 11: Comportamiento de los ángulos de alabeo.

La comparación de los ángulos de cabeceo se comporta de manera similar, describiendo una alta similitud como se muestra en la figura (14). El primer panel muestra la descripción del ángulo de cabeceo estimado, el segundo panel muestra la descripción del ángulo de cabeceo del Experimento 1 y el tercer panel muestra el error en la estimación. El comportamiento del ángulo estimado se muestra en color rojo, mientras el del ángulo tomado de la referencia se muestra en color azul.

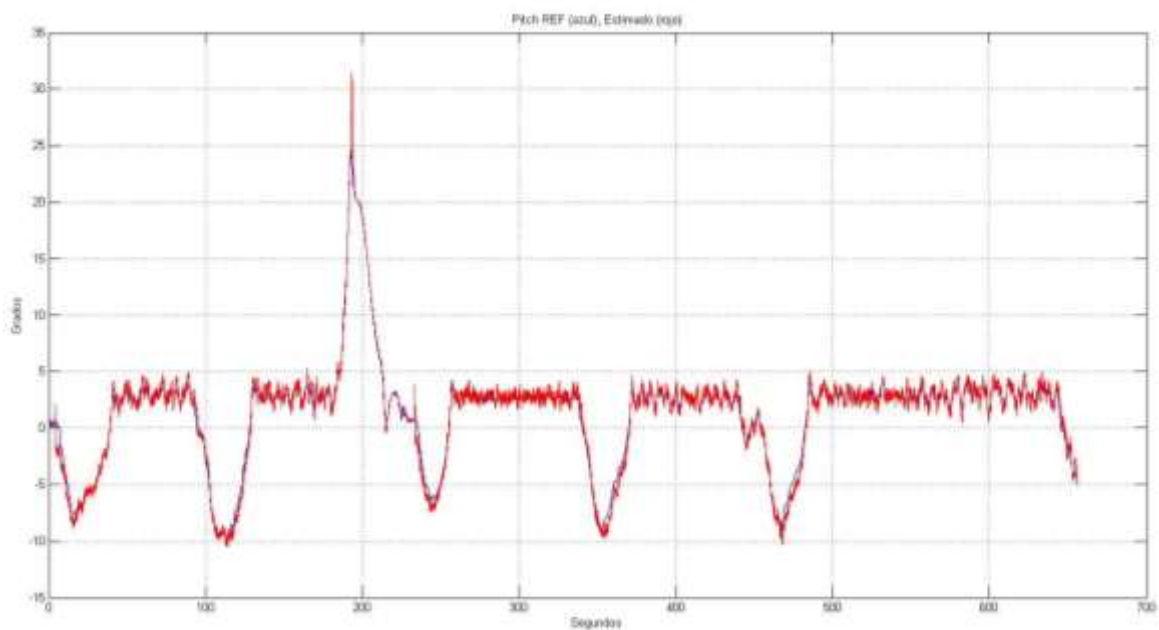


Figura 12: Comportamiento de los ángulos de cabeceo.

### 3.3 Comparación de la posición en latitud longitud y altura con el experimento

A continuación se muestran las gráficas generadas con la herramienta Matlab para comparar la posición en toda la trayectoria generada por el algoritmo, con la posición del submarino obtenida en el experimento.

Para comenzar se muestra la posición en latitud longitud estimada y la de referencia, donde se evidencia la similitud entre las trayectorias. La posición estimada por el algoritmo se muestra en color rojo, y la posición tomada del experimento se muestra en color azul.

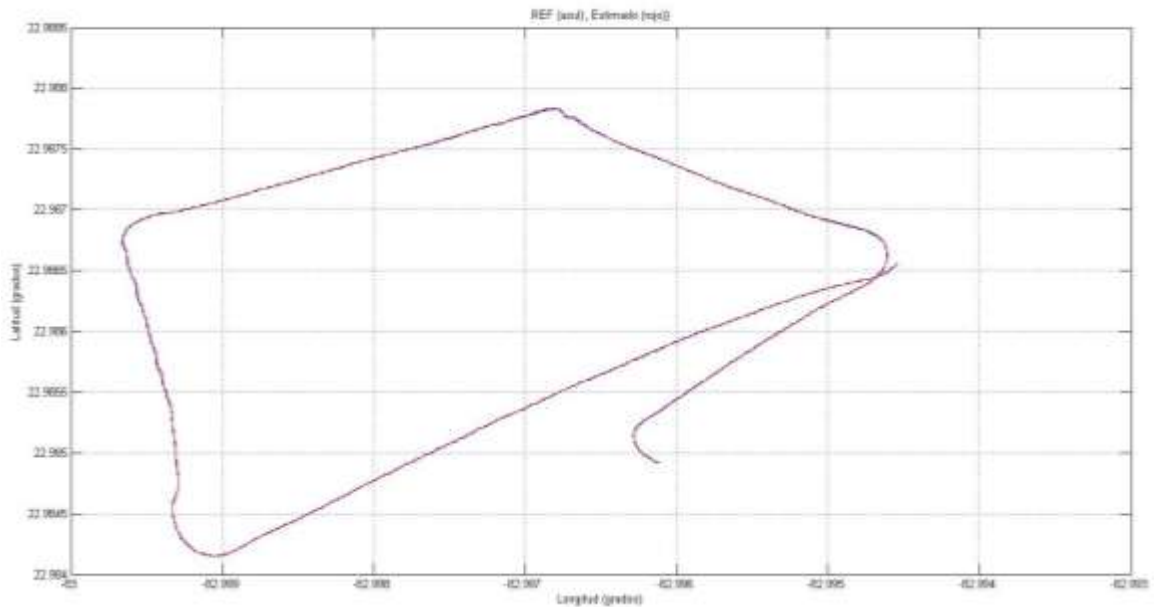


Figura 13: Descripción de las posiciones en latitud longitud.

Después de haber observado el comportamiento las trayectorias expresado en grados de latitud y longitud, se procede a mostrar la altura expresada en metros del algoritmo implementado y la referencia del experimento.



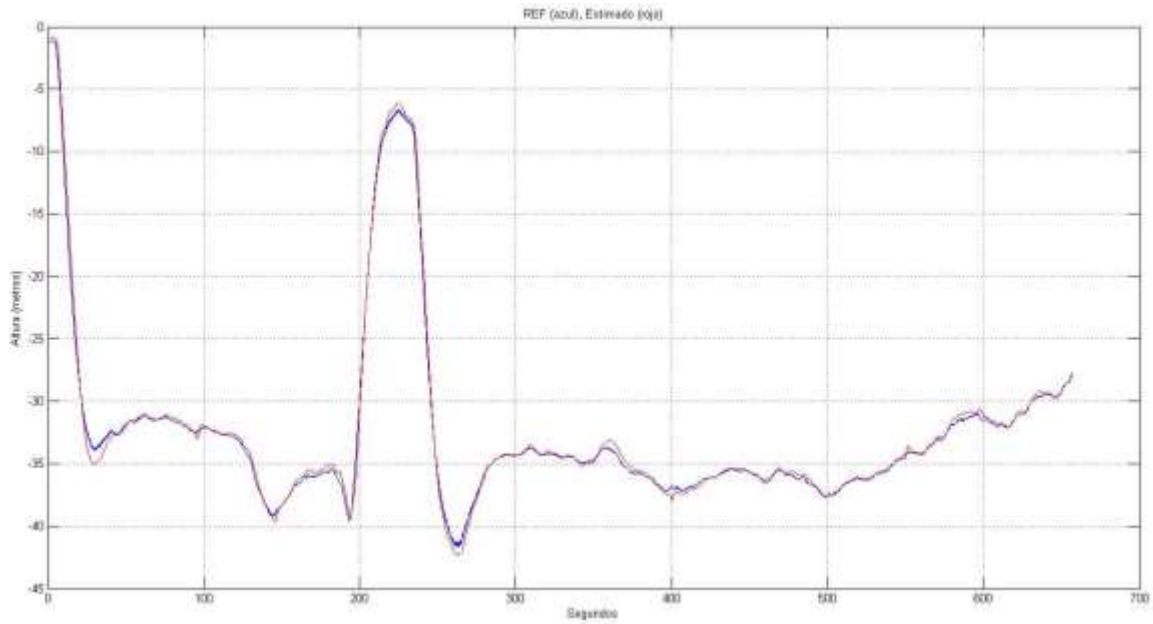


Figura 14: Descripción del comportamiento de las alturas.

### 3.4 Comparación de la velocidad

Para la comparación visual del comportamiento de la velocidad se utilizó el mismo método, graficado en la herramienta Matlab la velocidad obtenida por el algoritmo y la obtenida en el experimento. La velocidad es expresada en los ejes [x, y, z] por los que se grafica en tres paneles, el primer panel describe la velocidad en x, el segundo panel la velocidad en y, y el tercer panel la velocidad en z. A continuación, se muestra las gráficas que muestran lo anteriormente planteado. Las velocidades estimadas por el algoritmo se muestran en color rojo, y las obtenidas del experimento se muestran en color azul.

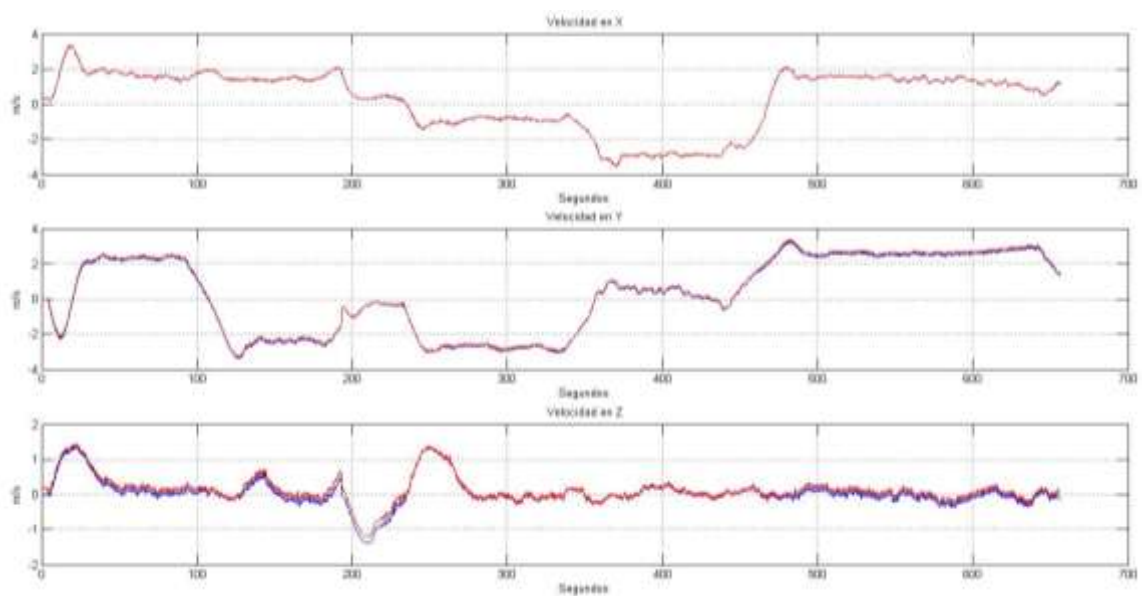


Figura 15: Descripción de las velocidades  $[v_x, v_y, v_z]$ .

### 3.6 Análisis estadístico de los resultados

Para validar estadísticamente los resultados obtenidos se utilizó la prueba de análisis de varianza ANOVA, ya que permite calcular la similitud entre los datos generados por el algoritmo y los datos registrados en los experimentos, determinando la existencia de diferencias significativas entre ellos. ANOVA prueba la hipótesis de que las medias de varias poblaciones son iguales y evalúa la significancia de la diferencia existente entre ellas (Terrádez y Juan 2003).

Para ello se plantea como hipótesis nula: las medias de los conjuntos de mediciones obtenidas por el algoritmo y las registradas en los experimentos son iguales. las medias de los conjuntos de mediciones obtenidas por el algoritmo y las registradas en los experimentos son diferentes.

X1: Media de las muestras de la población 1.

X2: Media de las muestras de la población 2.

H0:  $X1=X2$

H1:  $X1\neq X2$

#### 3.6.1 Comparación de la latitud

Para comprobar la similitud de la Latitud generada, con la Latitud del Experimento 1, se utilizaron pruebas de análisis de varianza, generando la tabla ANOVA. Para esto se seleccionaron cinco poblaciones de manera aleatoria de quinientas muestras cada una. A continuación, se muestran tres de estas 5 iteraciones.

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	2.78881e-11	1	2.78881e-11	0.07	0.7955
Error	4.15137e-07	1000	4.15137e-10		
Total	4.15165e-07	1001			

Figura 16: Iteración 1 de la prueba ANOVA para la comparación de la latitud.

Se puede comprobar que el valor crítico de significancia es mayor que 0.05 por lo que se acepta la hipótesis nula para un intervalo de confianza de un 95%. Lo mismo pasa para las próximas 2 poblaciones que serán mostradas a continuación

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	2.78881e-11	1	2.78881e-11	0.07	0.7955
Error	4.15137e-07	1000	4.15137e-10		
Total	4.15165e-07	1001			

Figura 17: Iteración 2 de la prueba ANOVA para la comparación de la latitud.

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	2.78881e-11	1	2.78881e-11	0.07	0.7955
Error	4.15137e-07	1000	4.15137e-10		
Total	4.15165e-07	1001			

Figura 18: Iteración 3 de la prueba ANOVA para la comparación de la latitud.

### 3.6.2 Comparación de la longitud

El comportamiento de la Longitud se muestra muy similar al de la Latitud. Utilizando para su comparación cinco poblaciones de quinientas muestras cada una. Todas las pruebas dieron un valor crítico de significancia por encima de 0.05, por lo que se acepta la hipótesis nula con un intervalo de confianza de 95%. A continuación, se muestran los resultados de tres de las cinco iteraciones.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	8.68134e-11	1	8.68134e-11	0.08	0.7801
Error	1.11295e-06	1000	1.11295e-09		
Total	1.11304e-06	1001			

Figura 19: Iteración 1 de la prueba ANOVA para la comparación de la longitud.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	8.68134e-11	1	8.68134e-11	0.08	0.7801
Error	1.11295e-06	1000	1.11295e-09		
Total	1.11304e-06	1001			

Figura 20: Iteración 2 de la prueba ANOVA para la comparación de la longitud.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	8.68134e-11	1	8.68134e-11	0.08	0.7801
Error	1.11295e-06	1000	1.11295e-09		
Total	1.11304e-06	1001			

Figura 21: Iteración 3 de la prueba ANOVA para la comparación de la longitud.

### 3.6.3 Comparación de la altura

Para completar las pruebas con respecto a la posición se le realiza el mismo procedimiento a la altura, el cual da un resultado satisfactorio en sus cinco iteraciones, con un valor crítico de significancia mayor que 0.05 para un intervalo de confianza de 95%. A continuación, se muestran los resultados de tres de las cinco iteraciones.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.0015	1	0.00152	0.03	0.8712
Error	57.5634	1000	0.05756		
Total	57.5649	1001			

Figura 22: Iteración 1 de la prueba ANOVA para la comparación de la altura.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.0015	1	0.00152	0.03	0.8712
Error	57.5634	1000	0.05756		
Total	57.5649	1001			

Figura 23: Iteración 2 de la prueba ANOVA para la comparación de la altura.

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.0015	1	0.00152	0.03	0.8712
Error	57.5634	1000	0.05756		
Total	57.5649	1001			

Figura 24: Iteración 3 de la prueba ANOVA para la comparación de la altura.

### 3.6.4 Comparación de la velocidad

Para realizar las pruebas de comparación de la velocidad se utilizó el mismo método estadístico que para los parámetros anteriores. Tomando cinco poblaciones aleatorias de 500 muestras cada una, por cada eje (X, Y, Z). Todos los valores críticos de significancia de la tabla ANOVA generada son satisfactoriamente mayor que 0.05, por lo que se deduce que los valores estimados son iguales que los esperados con un intervalo de confianza de 95%. A continuación, se muestran tres de estas quince iteraciones.

Para la validación de la velocidad en el eje X se muestra la siguiente prueba

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.00245	1	0.00245	0.4	0.5256
Error	6.08736	1000	0.00609		
Total	6.08982	1001			

Figura 25: Prueba ANOVA para la comparación de la velocidad en x.

Para la validación de la velocidad en el eje Y se muestra la siguiente prueba

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.00962	1	0.00962	1.2	0.2726
Error	7.97043	998	0.00799		
Total	7.98005	999			

Figura 26: Prueba ANOVA para la comparación de la velocidad en y.

Para la validación de la velocidad en el eje Z se muestra la siguiente prueba

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.00002	1	0.00002	0.01	0.9195
Error	1.70682	998	0.00171		
Total	1.70683	999			

Figura 27: Prueba ANOVA para la comparación de la velocidad en z.

### **3.8 Conclusiones del capítulo**

En este capítulo se realizó la validación de los resultados obtenidos con la implementación del algoritmo.

Se concluye que:

- ❖ El algoritmo propuesto es capaz de obtener los parámetros de navegación a partir de los datos inerciales registrados por sensores de bajo costo.
- ❖ Las salidas del algoritmo son similares en más de un 95% a los parámetros de referencia registrados en los experimentos, avalado por la prueba estadística de análisis de varianza.

## **Conclusiones Generales**

Al finalizar el presente trabajo de diploma se logró cumplir de manera satisfactoria los objetivos trazados, obteniéndose como resultado un algoritmo de navegación integrada capaz de generar parámetros de navegación a partir de datos experimentales de giróscopos, acelerómetros y referencia absoluta. En función de los objetivos de la investigación los resultados permitieron arribar a las siguientes conclusiones:

- ❖ El estudio de investigaciones precedentes sobre la navegación integrada INS/GPS contribuyó significativamente al desarrollo del algoritmo de navegación integrada INS/GPS propuesto.
- ❖ Se implementó un algoritmo de navegación integrada INS/GPS, destacándose como novedad la utilización de un estimador de orientación en el algoritmo de mecanización del INS. Esta solución garantiza la estimación de los parámetros de navegación para aplicaciones de vehículos autónomos subacuáticos con tecnología de bajo costo.
- ❖ El proceso de validación permitió comprobar la capacidad del algoritmo de estimar los parámetros de navegación con mediciones procedentes de sensores inerciales de bajo costo.

## Recomendaciones

Al término de este trabajo de diploma, se considera que es posible trabajar en las siguientes direcciones:

- ❖ Diseñar nuevas estrategias de fusión basadas en Filtro Extendido de Kalman para mejorar la estimación de los parámetros de navegación.
- ❖ Aplicar un método estadístico adecuado para la estimación de las matrices de covarianza del error, tanto del modelo como de las mediciones, para un mejor ajuste del Filtro Extendido de Kalman.
- ❖ Identificar una métrica más rigurosa para la evaluación de la precisión en la estimación de los parámetros de navegación inercial, y el valor de significación de los errores en los parámetros.
- ❖ Implementar el algoritmo propuesto en un lenguaje de bajo nivel con rendimiento cercano al tiempo real para su uso en prototipos de vehículo autónomo subacuático.



## Referencias bibliográficas

1. Gizmag. [En línea] 15 de Junio de 2015. [Citado el: 28 de marzo de 2016.] [http://www.gizmag.com/seawolf-gopro-submarine/38025/?li\\_source=LI&li\\_medium=default-widget](http://www.gizmag.com/seawolf-gopro-submarine/38025/?li_source=LI&li_medium=default-widget).
2. VectorNav Technologies, LLC. VectorNav Technologies, LLC. *VectorNav Technologies, LLC*. [En línea] 19 de 05 de 2016. <http://www.vectornav.com/support/library/ahrs>.
3. Pérez, Félix. Navegación por satélite. Evolución, tendencias tecnológicas y aplicaciones. 2015.
4. C. Yori, L. Peralta, E. Vera de Payer. *Integración de un INS con un GPS por medio de un Filtro de Kalman*. 2007.
5. mathworks. [es.mathworks.com](http://es.mathworks.com). *es.mathworks.com*. [En línea] 2016. <http://es.mathworks.com/products/matlab/>.
6. MacKenzi, Donald. *Inventing Accuracy: An Historical Sociology of Nuclear Missile Guidance*. 1993.
7. Groves, Paul D. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigaton Systems*. 2013.
8. Castillo, Gonzalo. *Navegación Integrada INS-GPS: Aplicación a un SAR aerotransportado*. 2012.
9. España, Martin. *Fundamentos de la Navegacion Integrada*. 2010.
10. Newton, Isaac. *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. 1686.
11. Resnick, Robert. *Introduction to Special Relativity*. s.l. : John Wiley & Sons, Inc, 1968.
12. Rogers, Robert M. *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, Second Edition*. Blacksburg, Virginia : s.n., 2003.
13. Weston, David H. Titterton y John L. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. 2004.
14. *Análisis de Diagnosticabilidad y Localización de Sensores en un pozo de Extraccion de petroleo por Inyeccion de gas*. Jose Aguilar, Rubén Leal, Louise Travé-Massuyès, Edgar Camargo, Addison Ríos. 2015, Politecnica.
15. Bernardí, Pablo Tomás. *Sistema de Navegacion para un cohete suborbital controlado*. 2013.
16. *Spot, Monografias del*. 2013.
17. Roasio, Federico Martin. *Desarrollo de un Sistema de Navegacion Integrado aplicado a Vehiculos Aereos no Tripulados*. 2013.
18. Bento, Maria de Fátima Alves Nunes. *Development and Validation of an IMU/GPS/Galileo Integration Navigation System for UAV*. 2013.
19. *The promise of mems to the navigation community. Insid GNSS*. Naser El-Sheimy, Xiaoji Niu. 2007.
20. Mohindew S. Grewal, Lawrence R. Weill, Angus P. Andrews. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*. 2007.

21. Dr. Javier Ventura-Traveset, Agencia Espacial Europea, ESA. *La Navegación por satélite y el Sistema Europeo Galileo*. 2016.
22. Posicionamiento GNSS. Lemmens, MSc. Mathias. 2016.
23. BAUTISTA, ING. RENÉ FABIÁN VÁZQUEZ. *Realización de filtrado Kalman aplicado a la sincronización del GPS Oncore UT+ basado en el TMS320C6711*. 2011.
24. Diaz, Daniel Vela. *ESTIMACIÓN DE ACTITUD EN APLICACIONES AEROESPACIALES*. 2010.
25. G. Welch, G. Bishop. *An Introduction to Kalman Filter*. 2001.
26. Sukkarieh, Salah. *A Low-Cost, Redundant Inertial Measurement Unit for Unmanned Air Vehicles*. 2006.
27. Lic. Andrés Mauricio Castro Pescador, Ing. Leonardo Solaque Ph.D. *Fusión Sensórica INS/ GPS para Navegación en Plataformas Móviles*. NUEVA GRANADA : s.n., 2013.
28. Sastré, Heberto Madrigal. *Implementación de un sistema AHRS basado en un Observador No lineal*. 2011.
29. Maybeck, Peter S. *Stochastic Models, Estimation, and Control: Volume 1*. Navtech Book & Software Store. 1994.
30. *Attitude and gyro bias estimation by the rotation of an inertial measurement unit*. Zheming Wu, Zhenguo Sun, Wenzeng Zhang, Qiang Chen. 2015.
31. Shin, Eun-Hwan. *Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications*. 2001.
32. Wegener, Alfred. *El origen de los continentes y océanos*. 1993.
33. Blidberg, D. Richard. *The Development of Autonomous Underwater Vehicles (AUV)*. 2001.
34. Refsnes, Jon Erling Gorset. *Nonlinear Model-Based Control of Slender Body AUVs*. 2007.
35. Vicens Otero, Jose y Medina Moral, Eva. *Análisis de la varianza (Anova)*. . 2005.
36. Priyanka Aggarwal, Zainab Syed, Aboelmagd Noureldin, Naser El-Sheimy. *MEMS-Based INTEGRATED NAVIGATION*. 2010.
37. Ribeiro, Maria Isabel. *Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties*. 2004.
38. Goldstein, H. *Mecánica Clasica*. 2006.
39. Carrasco, Guillermo Robles. *Diseño y estudio hidrodinámico de un submarino autónomo no tripulado : AUV*. 2015.
40. Raúl Fernando Beltrán Sánchez, Iván Alexander Llumiquinga Llumiquinga. *Diseño e implementación de un sistema de monitoreo para una plataforma aérea usando sistemas embebidos*. 2016.
41. Xianjun Liu, Qing Song, Yan Yang, Yiting Liu, Lihui Wang. *A novel self-alignment method for SINS based on three vectors of gravitational apparent motion in inertial frame*. 2015.

42. Dale A. Force, James J. Miller. *Combined Global Navigation Satellite Systems in the Space Service Volume*. 2015.
43. Daniel Alpayá, Fabrizio Colombob, David P. Kimseya, Irene Sabadinib. *An extension of Herglotz's theorem to the quaternions*. 2014.
44. Wei Quan, Jianli Li, Xiaolin Gong, Jiancheng Fang. *INS/CNS/GNSS Integrated Navigation Technology*. 2015.
45. Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews. *KALMAN FILTERING: Theory and Practice Using MATLAB*. 2008.
46. Jouni Hartikainen, Arno Solin, Simo Särkkä. *Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers*. 2011.
47. Fujii, Keisuke. *Extended Kalman Filter*. 2013.
48. Alejandro Ramírez González, Juan Fernández Rubio. *INTEGRACION GPS/INS: CONCEPTOS Y EXPERIMENTOS*. Cataluña : s.n., 2011.
49. Zheming Wu, Zhenguo Sun, Wenzeng Zhang, Qiang Chen. *Attitude and gyro bias estimation by the rotation of an inertial measurement unit*. 2015.
50. A.Pozo-Ruz, A.Ribeiro, M.C.García-Alegre, L.García, D.Guinea, F.Sandoval. *SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS): DESCRIPCIÓN, ANÁLISIS DE ERRORES, APLICACIONES Y FUTURO*. 2000.
51. Benzerrouk, Hamza M. *Modern Approaches in Nonlinear Filtering Theory Applied to Original Problems of Aerospace Integrated Navigation Systems with non-Gaussian noises* . Saint Petersburg : s.n., 2014.
52. *The Design and Implementation of a Robust AHRS for Integration into a Quadrotor Platform*. Watson, Matthew. 2013.
53. Laguardia, Alain Sebastián Martínez. *Model aided Inertial Navigation for AUV*. 2014.