



Temática: Virtualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias informáticas y afines

Sistema de prácticas con Geogebra para Matemática I en la modalidad no presencial

System of practices with Geogebra for Matemática I in the nonpresential modality

Antonio Rey Roque^{1*} Alexander Rodríguez Rabelo², Yareida Fabián Estrada³,

Resumen

En el presente trabajo se muestra el resultado logrado al diseñar, elaborar y colocar como recurso educativo un sistema de prácticas con el software dinámico Geogebra en Matemática I, modalidad no presencial, con el objetivo de contribuir mediante la visualización y interacción dinámica a la mayor comprensión de los conceptos fundamentales involucrados en los temas de la asignatura. Para el diseño de las prácticas se determinó en cada tema cuáles eran los conceptos en estudio y cuál era su imagen conceptual, junto a cuáles de sus características son susceptibles de ser representadas dinámicamente e interactuar con ellas, se estudiaron las potencialidades del software Geogebra para conocer cuáles de las ideas podían ser implementadas, paralelamente se realizó un estudio de applets de este software para tomar ideas, reutilizar los factibles y desarrollar otros nuevos. Teniendo en cuenta los objetivos y habilidades declaradas en cada tema de la asignatura fueron elaboradas las actividades que conformaron las prácticas. En su ejecución y siguiendo la guía para su realización los estudiantes tenían que redactar un informe sobre el resultado de las prácticas indicada en las lecciones de cada tema. La realización de este tipo de actividad corroboró la incidencia de la visualización con el empleo de un software dinámico en la mejor comprensión de los conceptos y procedimientos de la matemática, en particular en los temas de la asignatura Matemática I de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas.

Palabras clave: Geogebra, sistema de prácticas, visualización de conceptos, enseñanza virtual

Abstract

The work shows the result achieved when designing, elaborating and placing as an educational resource, a system of practices with the dynamic software Geogebra in Mathematics I, a non-face-to-face modality with the aim of



¹ Universidad de las Ciencias Informáticas. Carretera San Antonio km 2 ½ Torrens. Boyeros. antrey@uci.cu

² Universidad de las Ciencias Informáticas. Carretera San Antonio km 2 ½ Torrens. Boyeros. arodriguezra@uci.cu

³ Universidad de las Ciencias Informáticas. Carretera San Antonio km 2 ½ Torrens. Boyeros. yfestrada@uci.cu

^{*} Autor para correspondencia: antrey@uci.cu



Internacional Universidad de las Ciencias Informáticas



contributing through visualization and dynamic interaction to a better understanding of the fundamental concepts involved in the subjects of the discipline. For the design of the practices, it was determined in each topic which were the concepts under study and what was its conceptual image, together with which of its characteristics are capable of being dynamically represented and interacting with them, the potentialities of the Geogebra software were studied to know which of the ideas could be implemented, in parallel a study of applets of this software was carried out to take ideas, reuse the feasible ones and develop new ones. Taking into account the objectives and the abilities declared in each subject, the activities that made up the practices were elaborated. In its execution and following the guide for its realization, the students had to write a report on the result of the practices indicated in the lessons of each topic. Carrying out this type of activity corroborated the incidence of visualization with the use of dynamic software in better understanding the concepts and procedures of mathematics, particularly in the subjects of the Mathematics I subject of the Engineering in Informatics Sciences career

Keywords: Geogebra, practice system, concept visualization, virtual teaching

Introducción

El estudio de la matemática superior resulta imprescindible en cualquiera de las carreras de ingeniería, durante el mismo tiene lugar la apropiación de los conocimientos, las habilidades, las capacidades matemáticas, las experiencias sociales, los modos de actuación, en el desarrollo de diversos aspectos afectivos, volitivos y conductuales, así como opiniones, principios, convicciones e ideas. (Ballester y otros, 2018)

La disciplina Matemática incluye conceptos que contribuyen además al desarrollo del pensamiento lógico, heurístico y algorítmico del profesional en formación, desarrolla su capacidad de resolver problemas, la habilidad para expresar en el lenguaje matemático fenómenos y procesos reales, es decir, modelar matemáticamente, también la habilidad para interpretar los resultados obtenidos. (Ortiz, 2017).

En la actualidad, las universidades cubanas asumen el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, como un sistema en el cual se garantiza la apropiación activa, creadora, significativa y motivada del contenido, como parte de la cultura general integral, teniendo en cuenta el desarrollo actual, con el propósito de ampliar continuamente los límites de desarrollo próximo potencial. (Ballester y otro, 2018)





El aprendizaje de la Matemática debe además hacer una importante contribución a la formación de los estudiantes en el uso de la computación, mediante la utilización amplia de asistentes matemáticos para realizar cálculos simbólicos, numéricos y gráficos. Es por eso, que la utilización de estos asistentes se ha considerado en la actualidad cada vez más importante dentro del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

A partir de la declaración de pandemia por COVID-19 establecida por la Organización Mundial de la Salud (OMS) el 11 de marzo de 2020, prácticamente todos los países del mundo comenzaron a aplicar planes de preparación y respuesta a fin de tratar de controlar los efectos de esta enfermedad en la población. En tales condiciones, las universidades se vieron abocadas a la suspensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje en su modalidad presencial y su continuidad en formato virtual. Así, además de los retos que venía enfrentando la universidad, esta precipitada transición se ha convertido en un nuevo desafío para estudiantes y profesores. (Pérez y otros., 2021).

El objetivo del presente trabajo es mostrar el resultado logrado por el colectivo de profesores de la asignatura Matemática I en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas al diseñar, elaborar y utilizar como recurso educativo un sistema de prácticas de laboratorio con el software dinámico Geogebra en la modalidad no presencial, para contribuir mediante la visualización e interacción dinámica a la mayor comprensión de los conceptos fundamentales involucrados en los temas de la asignatura.

Materiales y métodos

La enseñanza aprendizaje de la matemática en cualquiera de los niveles de enseñanza es un proceso complejo que exige gran creatividad por parte de los profesores para que los estudiantes comprendan los conceptos en estudio y desarrollen las habilidades concebidas en cada asignatura, si este proceso se realiza de forma no presencial aumenta la complejidad y con ella el reto de diseñar actividades que permitan tener éxito.

En el contexto actual se pone énfasis en la comprensión de los conceptos matemáticos por los estudiantes, lo cual se verá reflejado en el desarrollo de las habilidades necesarias en su formación como futuros ingenieros informáticos y traerá consigo el cumplimiento de los objetivos previstos para la asignatura Matemática I.





Se considera que la comprensión de un concepto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones y las relaciones funcionales entre ellas (Casillas, 2018).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de matemáticas implica saber representar los conceptos matemáticos en forma simbólica, numérica, gráfica o verbal, y realizar con ellos transformaciones (en la misma forma de representación) y/o conversiones. Se considera que de esta manera se enriquece la construcción de significados, ya que se brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar a fondo las características de los conceptos y las interrelaciones entre ellos. (Casillas, 2018)

Hoy en día la utilización de asistentes matemáticos se vuelve cada vez más habitual en la enseñanza de las Matemáticas, a la vez van abriendo paso a nuevas formas de aprender y enseñar. Estas nuevas maneras pueden facilitar el aprendizaje del estudiante y, por consiguiente, conllevar mejoras en los resultados académicos.

La utilización del Geogebra específicamente, se debe a que no solo es un programa de geometría dinámica que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos. Sino que, además, es gratuito y fácil de utilizar, lo que permite realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y las diferentes opciones que ofrece.

Este programa está en continua actualización y cuenta con una amplia comunidad de desarrolladores para cada nueva versión producen nuevas herramientas y por tanto su potencial aumente. Se puede adaptar a cualquier nivel educativo; además, tiene la capacidad de interactuar en entornos virtuales, por lo que se convierte en una opción importante utilizar en el proceso docente. (Ricaldi, 2018)

Para el diseño de las prácticas se determinó en cada tema cuáles eran los conceptos en estudio y cuál era su imagen conceptual, junto a cuáles de sus características son susceptibles de ser representadas dinámicamente e interactuar con ellas, se estudiaron las potencialidades del software Geogebra para conocer cuáles de las ideas podían ser implementadas, paralelamente se realizó un estudio de applets de este software para tomar ideas, reutilizar los factibles y desarrollar otros nuevos.







Teniendo en cuenta los objetivos y habilidades declaradas, en cada tema de la asignatura fueron elaboradas las actividades que conformaron las prácticas. En su ejecución y siguiendo la guía para su realización, los estudiantes debían que redactar un informe sobre el resultado de las prácticas indicada en las lecciones de cada tema. La realización de este tipo de actividad corroboró la incidencia de la visualización con el empleo de un software dinámico en la mejor comprensión de los conceptos y procedimientos de la matemática, en particular en los temas de la asignatura Matemática I de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas

Resultados y discusión

Como resultado del estudio realizado fueron diseñados y elaborados 27 applets de Geogebra y las guías correspondientes para la realización de las prácticas y el informe de esta actividad, la distribución por temas se muestra en la tabla 1:

Tabla 1. Cantidad de applets y prácticas creados por tema

	Applets	Prácticas
Tema 1: Funciones	12	5
Tema 2: Sucesiones y series	7	6
Tema 3: Límite y continuidad	8	6
Total	27	19

Por lo general cada applet se corresponde con una práctica excepto en el tema 1, donde algunas utilizan más de uno. Cada práctica es orientada en el momento indicado de la lección a la cual corresponde y cuenta con una guía para su realización que junto a las instrucciones que están en el propio applet servirán también para la redacción de informe correspondiente a la práctica en cuestión.

Las guías tienen en común una actividad, la que pide utilizar los applets para estudiar ejercicios resueltos y resolver los propuestos, y un reto:







"Utiliza esta aplicación para visualizar la solución a los ejercicios y problemas resueltos y propuestos sobre esta temática. Reto: Eres libre de modificar el fichero, hazlo, crea otras funcionalidades sobre la temática que expone. Si lo incluyes en el informe recibirás una valoración ponderada."

A continuación, se explican los applets diseñados por lecciones, se plantea el objetivo de cada práctica y una descripción de su utilización.

Prácticas del tema 1: Funciones

En este tema se realiza un repaso sobre las funciones reales de una variable real, temática estudiada en la enseñanza precedente, las prácticas con Geogebra están dirigidas a la visualización de las propiedades más importantes de este tipo de funciones, también representan la apertura en el empleo de este tipo de recurso por lo cual son más simples.

Práctica No 1 (Objetivo: Interpretar gráficamente dominio e imagen de una función): El alumno experimenta con diversas funciones y puede observar la representación de estos dos conjuntos en los ejes coordenados, lo cual contribuye a fijar la idea de que el eje real de las abscisas representa al dominio y el eje real de las ordenadas representa a la imagen. En la figura 1 se muestra una captura del applet para esta práctica donde se observa como el dominio y la imagen de la función escogida se representa sobre los ejes en color azul y rojo respectivamente.

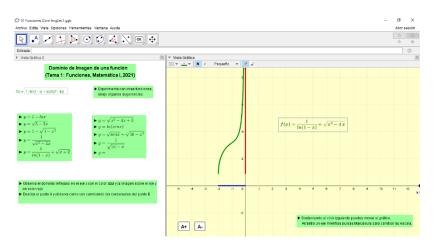


Figura 1. Dominio e imagen de una función





Práctica No. 2 (Utiliza cinco applets con el objetivo: Interpretar gráficamente las propriedades de las funciones lineales, polinomiales, exponencial, logarítmica y trigonométricas): El alumno puede interactuar con los

Práctica No. 3 (Interpretar gráficamente las propriedades de las funciones definidas por intervalos): Las funciones definidas por intervalos serán frecuentemente utilizadas en temas posteriores por lo que resulta importante que los alumnos las interpreten muy bien. En esta práctica puede interactuar no solo con los límites de los intervalos, también con los parámetros que provocan una traslación vertical en el gráfico. Se agregó además la opción de visualizar el gráfico de cada función completamente y de esta forma apreciar los "cortes" que se efectúan en cada intervalo.

parámetros de la cada una de las funciones de manera que visualiza el efecto que tienen sobre el gráfico.

Práctica No. 4: (Utiliza tres applets con el objetivo de interpretar gráficamente las propiedades monotonía, simetría de una función y la relación con su función inversa): En esta práctica los alumnos comienzan con el applet para la monotonía, a asociarla con la recta tangente a la curva en el punto de análisis paso superior que será estudiado con en el Cálculo diferencial, además podrán visualizar los intervalos donde crece o decrece la función. De igual manera los prepara para enfrentar el análisis de la gráfica de una función materia que se estudiará en Matemática II y podrán interactuar dinámicamente para visualizar la propiedad de simetría, experimentando con funciones pares, impares y con ninguna de esas cualidades. La práctica cierra con la posibilidad de observar en un mismo sistema de coordenadas el gráfico de una función y el gráfico de su inversa.

Prácticas del tema 2: Sucesiones y series

El tema cuenta con tres lecciones y siete prácticas que se corresponde cada una con un applet de Geogebra. Las prácticas se diseñaron para contribuir a la fijación de conceptos tan importantes como los de sucesión, serie y convergencia.

Práctica No. 1 (Interpretar gráficamente las representaciones de una sucesión): Con la interacción en este applet se podrán visualizar las dos formas de representación gráfica de los términos de una sucesión, apreciar además su monotonía, experimentar con diversas sucesiones, lo que permitirá un acercamiento al concepto de límite de una





sucesión. Para el informe se pide expresar lo observado en relación con la diferencia entre las dos formas de representación, no solo posicionalmente también con respecto a su monotonía, la cual es más evidente cuando se utiliza un sistema bidimensional. La figura 2 muestra capturas de dos de los applets de la lección 1 del tema 2 donde puede apreciarse la posibilidad de interactuar con diversas sucesiones y observar sus propiedades principales.

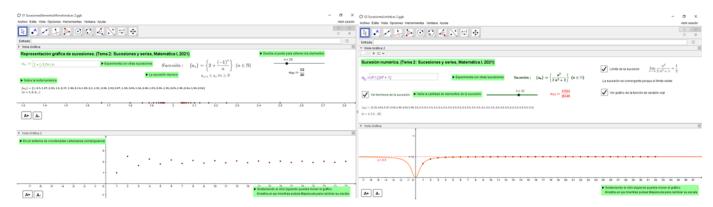


Figura 2. Imagen ilustrativa de los applets para las prácticas de la lección 1, tema 2.

Práctica No. 2 (Interpretar gráficamente el límite de una sucesión y su relación con su convergencia)

Esta práctica permite interactuar con casi todos los elementos de la práctica No. 1 pero en lo gráfico solo presenta la variante bidimensional, agrega el elemento límite y convergencia, el alumno interactúa con el applet variando la sucesión y visualizando el límite gráficamente asociado a una recta que luego se verá es una asíntota de la curva que contiene a los elementos de la sucesión. Las posibilidades de modificar los componentes del sistema de representación le permiten apreciar el significado de la convergencia asociado al límite de la sucesión.

Práctica No. 3 (Interpretar gráficamente el método de iteración general o de punto fijo): Este método se introduce como parte de la integración de los métodos numéricos con los otros temas, aquí porque tiene que ver con las sucesiones que se generan al realizar las iteraciones y que se concretarán con el estudio y aplicación del algoritmo de Jacobi para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En la práctica puede visualizarse la dinámica que se produce en la función de iteración, apreciando los casos en que el método converge y en que diverge dependiendo tanto de la propia función escogida como del punto de inicio del algoritmo.







Prácticas de la lección 2: Series numéricas

Práctica No. 1 (Interpretar gráficamente las series geométricas y sus propiedades)

En esta práctica el alumno interactúa con los elementos de las series geométricas asociados a una interpretación gráfica relacionada con la geometría básica. Modificar el valor del factor de proporcionalidad geométrico r y relacionarlo con la convergencia o no de la serie contribuye a fijar la comprensión de este concepto.

Práctica No. 2 (Interpretar los criterios del término n-ésimo, de comparación, cociente y de la raíz para determinar la convergencia o divergencia para las series numéricas): Esta práctica integra lo estudiado sobre series numéricas, permite al alumno interactuar con todos lo elementos necesarios para el análisis de la convergencia de una serie y visualizar el comportamiento gráficamente. Permite introducir dos series a la vez lo que facilita aplicar el criterio de comparación y apreciar gráficamente además la relación entre los términos comparados. Al poder trabajar dos series a la vez puede comparar el comportamiento de ambas relacionándolo con los criterios que se expresan en el applet el cual les sirve también como una calculadora para los fines de análisis de la convergencia de una serie numérica. En la figura 3 se aprecian dos capturas de applets para las prácticas de la lección 2 del tema 2, una para la visualización de series geométricas y la otra relacionada con los criterios de convergencia de series numéricas.

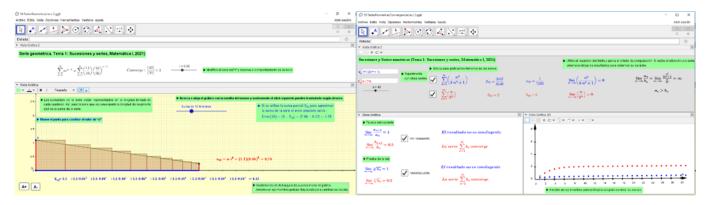


Figura 3. Imagen ilustrativa de los applets para las prácticas de la lección 2, tema 2.



Prácticas de la lección 3: Series de funciones

Práctica No. 1 (Aplicar los criterios de convergencia para determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias): Se experimenta con series de potencias seleccionadas y el applet muestra hasta sus diez primeros términos, así como el modo de calcular y calcula el radio de convergencia para cuando las funciones potenciales son de exponente n, de una manera dinámica y en un menor tiempo que en el trabajo manual, el alumno puede interactuar con varias series observando como se determina el intervalo de convergencia.

Práctica No. 2 (Interpretar gráficamente la relación entre una función y su desarrollo en series de potencias mediante los polinomios de Taylor): Esta práctica es el colofón del tema, el alumno interactúa con elementos que resumen lo aprendido en la materia de sucesiones y series, interactúa con el desarrollo en series de potencias de funciones que escoge él mismo de los ejemplos, los ejercicios o funciones que puede crear. Visualiza gráficamente la relación entre la función desarrollada y los polinomios que se obtienen al truncar el desarrollo en series de potencias, de una manera rápida aprecia la relación entre la cantidad de términos tomados, el centro del desarrollo y el error en la aproximación de valores de la función utilizando la serie desarrollada. La figura 4 muestra capturas de las prácticas concebidas para la lección 3 del tema 2 donde el estudiante interactúa con las series de potencias en el análisis de la convergencia y con el desarrollo de funciones en series de Taylor relacionando el gráfico de la función con desarrollos de diferentes grados.

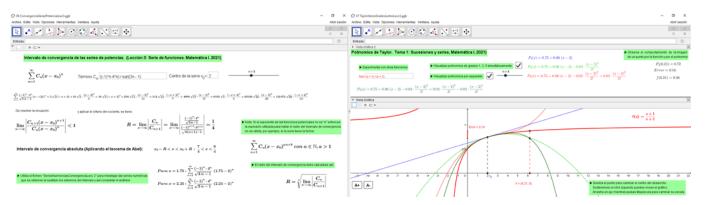


Figura 4. Imagen ilustrativa de los applets para las prácticas de la lección 3, tema 2.





Prácticas del tema 3: Límite y continuidad

Para las tres lecciones del tema se diseñaron y elaboraron ocho applets de Geogebra para igual número de prácticas con el objetivo de contribuir a la mejor comprensión de los conceptos básicos del Cálculo como lo son el de límite y

continuidad de funciones reales de una variable real.

Prácticas de la lección 1: Límite en el infinito

Práctica No. 1 (Interpretar gráficamente la definición de límite en el infinito de una función real): La práctica utiliza dos applets, en el primero se establece un enlace con el tema anterior y puede interactuar con la función seleccionada y la sucesión que se corresponde con su ecuación, asocia así lo aprendido del límite de una sucesión con el límite en el infinito de una función real de variable real. Con el segundo applet visualiza la definición de límite en el infinito de una función de variable real, interactúa con los elementos de la definición variando el valor del intervalo alrededor del límite supuesto para verificar su veracidad o no mediante la visualización gráfica y experimentando con varias

funciones.

Práctica No. 2 (Interpretar gráficamente la relación asintótica entre funciones infinitas): Con esta práctica el alumno aprecia una generalización de la comparación de sucesiones infinitas estudiada en el tema 2 y relacionada con la notación de Bachmann-Landau ahora aplicada a la relación entre funciones reales infinitas. Puede interactuarse dinámicamente comparando tres funciones escogidas, modificando el intervalo y las escalas de los ejes a la vez que puede observar el valor del límite del cociente en las tres combinaciones necesarias para establecer la comparación que se muestra utilizando la notación de Bachmann-Landau la cual volverán a encontrar con el estudio de la complejidad algorítmica en la disciplina Técnicas de programación.

En la figura 5 se muestran dos capturas de los applets utilizados para las prácticas de la lección 1 del tema 3, los estudiantes refuerzan el concepto de límite en el infinito de una función interactuando con los elementos de la definición épsilon-delta.



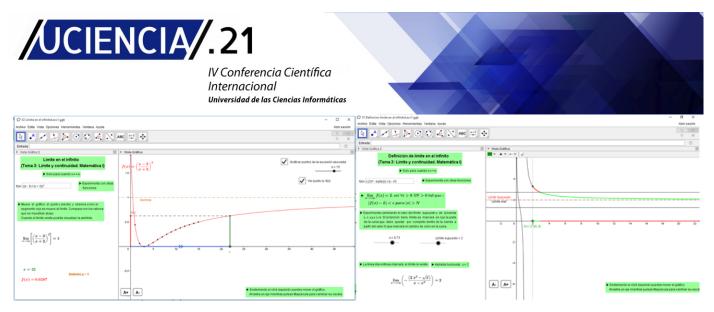


Figura 5. Imagen ilustrativa de los applets para las prácticas de la lección 1, tema 3.

Prácticas de la lección 2: Límite en un punto. Continuidad

Práctica No. 1 (Interpretar gráficamente la definición de límite en un punto de una función real de una variable real): En la práctica se interactúa dinámicamente con los elementos de la definición épsilon-delta de límite de una función en un punto, modificando los valores de ϵ y δ se aprecia el cumplimiento del postulado asociándolo con la observación gráfica de casos en que sí existe el límite y casos en que no. La interpretación de los límites laterales mediante la interacción con la función y el punto de análisis en los casos en que estos límites son diferentes a la izquierda y a la derecha es posible en un alto nivel con este applet. En la figura 6 se muestran capturas de los applets diseñados para las prácticas de la lección 2 del tema 3, se observan las posibilidades para interactuar con los elementos de la definición de límite en que permiten y apreciar su relación con la continuidad de una función.

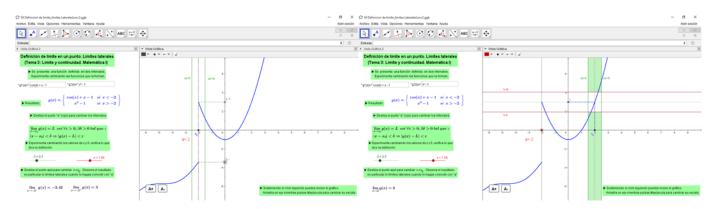


Figura 6. Definición de límite y límites laterales





Práctica No. 2 (Interpretar gráficamente la continuidad de una función y los tipos de discontinuidades): Experimentando con diversas funciones se puede interactuar identificando y visualizando su comportamiento gráfico, las discontinuidades posibles en la función. El applet ofrece la posibilidad de introducir funciones definidas en dos intervalos de manera que puedan apreciarse todos los tipos de discontinuidades y asociarlos con los elementos de la definición los cuales se evalúan y se muestran. La apreciación gráfica de las discontinuidades encontradas refuerza la comprensión de esta cualidad de las funciones reales de una variable real, además permite asociar las discontinuidades infinitas con la existencia de asíntotas verticales en el gráfico de la función.

Prácticas de la lección 3: Aplicaciones

Para la lección se diseñaron y elaboraron dos applets, uno para la aplicación al estudio de funciones, en particular las asíntotas del gráfico y el otro para el método de bisección en la resolución de ecuaciones no lineales como aplicación del teorema de Bolzano.

Práctica No. 1 (Interpretar gráficamente lo referente a las asíntotas oblicuas - horizontales como caso particular): La práctica y el applet asociado permite integrar lo aprendido sobre el límite en un punto y en el infinito al estudio de las funciones reales de una variable real que viene desde la enseñanza precedente y tiene continuación en Matemática II con el estudio del Cálculo diferencial. Se experimenta con funciones para visualizar interactuando con la imagen la existencia y representación de las asíntotas que puede tener el gráfico, integrando los tres tipos, las verticales, observando el límite en un punto y las oblicuas (con las horizontales como caso particular) observando el resultado de los límites en el infinito.

Práctica No. 2 (Interpretar analítica y gráficamente el método de bisección como una aplicación de la continuidad): El método de bisección es el segundo de dos que se integra en la asignatura, resultado de la aplicación del teorema de Bolzano relacionado con la continuidad de una función. Con el applet el alumno interactúa con ecuaciones no lineales, el gráfico de las funciones asociadas y el algoritmo del método, dando un seguimiento paso a paso que le permite comprenderlo con mayor facilidad tanto con cálculos aislados como en un formato de tabla. La figura 7





muestra capturas de los dos applets utilizados en estas prácticas los cuales permiten interactuar el gráfico de diversas funciones y sus asíntotas, también con el método de bisección.

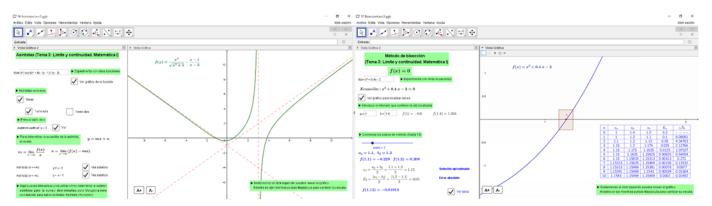


Figura 7. Imagen ilustrativa de los applets de s prácticas de la lección 3, tema 3.

Conclusiones

Con el presente trabajo se elaboraron applets con Geogebra que fueron utilizadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática I en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, las mismas fueron utilizadas en el curso a distancia y contribuyeron al desarrollo en los estudiantes las habilidades previstas en el programa de la asignatura, así como a la mejor comprensión de los conceptos y procedimientos estudiados

Referencias

Ballester Sergio y otros. (Ed.). (2018). *Didáctica de la Matemática*. La Habana: Editorial Universitaria Félix Varela Barcelona: Graó.

Casillas González, Juan Martín, y otros. (2018) Construcción de significados de los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 31 (1).







Pérez-López, Eva; y otros. (2021). Educación a distancia en tiempos de COVID-19: Análisis desde la perspectiva de los estudiantes universitarios. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 24 (1). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=331464460016.

Ricaldi, Myriam; Torres, Isabel. (2018). *GeoGebra: una herramienta para transitar de la exposición a la interacción*. Trabajo presentado en IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 339-344). Huancavelica: Universidad Nacional de Huancavelica

