



UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL TONELAJE EN
MODELOS DE BLOQUES CON RESTRICCIONES
GEOMÉTRICAS

TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO DE MÁSTER EN
INFORMÁTICA APLICADA

Autor:

Ing. Eddy Dangel Quesada Rodríguez

Tutor:

Dr. C. Yusnier Valle Martínez

La Habana

Julio de 2014

DEDICATORIA Y AGREDECIMIENTOS

Dedicado a:

Mis padres, Berta M. Rodríguez Socarrás y Basilio B. Quesada Keizer

Mis hermanos Iraida Mateo Rodríguez y Alfredo Mateo Rodríguez.

Agradecimientos especiales para:

Mi tutor, Dr.C. Yusnier Valle Martínez,

Mis revisores técnicos, Ing. Dagoberto A. Suárez Morales,

Ing. Carlos A. Quintana Valdés,

Ms.C. Romanuel Ramón Antúnez y

Ms.C. Zayli Rodríguez Luis.

Los especialistas de la ONRM, Ing. Mabel Pérez Campo y Ms.C. José Arias.

DECLARACIÓN JURADA DE AUTORÍA

Declaro por este medio que yo Eddy Dangel Quesada Rodríguez, con carnet de identidad 84091718086, soy el autor principal del trabajo final de maestría que lleva por título “*Algoritmo para el cálculo del tonelaje en modelos de bloques con restricciones geométricas*”, desarrollado como parte de la Maestría de Informática Aplicada y que autorizo a la Universidad de las Ciencias Informáticas a hacer uso de la misma en su beneficio, así como los derechos patrimoniales con carácter exclusivo.

Finalmente declaro que todo lo anteriormente expuesto se ajusta a la verdad y asumo total responsabilidad moral y jurídica que se derive de este juramento profesional.

Y para que así conste, firmo la presente declaración jurada de autoría en La Habana a los _____ días del mes _____ del año _____ .

Firma del maestrante

Resumen

La cuantificación de los recursos y reservas minerales es una de las actividades fundamentales realizadas en la industria minera. En esta actividad se calculan los valores de las leyes minerales, el volumen y el tonelaje. Actualmente los valores obtenidos durante la cuantificación son registrados en modelos de bloques, los cuales constituyen la base de la planificación y del control de la producción minera. Para calcular el volumen y el tonelaje dentro de un modelo de bloques se utilizan restricciones geométricas. Algunos de los principales problemas existentes en el cálculo sobre un modelo de bloques, del volumen y el tonelaje del material contenido en dominio geométrico, consisten en identificar los bloques dentro de un dominio y calcular el volumen parcial en los bloques fronteras.

En la presente investigación se desarrolló un algoritmo que permite calcular sobre un modelo de bloques, el volumen y el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico, teniendo en cuenta el volumen parcial contenido en los bloques fronteras. El algoritmo desarrollado emplea segmentos de líneas para calcular un volumen aproximado del material contenido en los bloques del modelo. El método de los segmentos de líneas permite obtener un volumen aproximado con un alto nivel de efectividad y también identificar con facilidad la posición relativa de los bloques con respecto al dominio geométrico.

Palabras claves: algoritmo, cálculo, mineral, modelo de bloques, tonelaje, volumen

ÍNDICE

Introducción	1
1. Fundamentación teórica	6
1.1. Elementos asociados al dominio del problema	6
1.2. Cuantificación de los recursos y reservas minerales	7
1.2.1. Métodos de estimación de recursos minerales	7
1.2.2. Métodos de cálculo del volumen	11
1.2.3. Métodos de cálculo del tonelaje	13
1.3. Modelos de bloques	14
1.3.1. Dominios geométricos en modelo de bloques	16
1.3.2. Cálculo del volumen y tonelaje dentro de dominios geométricos	16
1.4. Análisis de soluciones existentes	17
1.4.1. Método de cálculo del sistema Tierra	18
1.4.2. Método de subdivisión	18
1.4.3. Método de la superficie proyectada	19
1.4.4. Método de las agujas	20
1.5. Conclusiones parciales	21
2. Propuesta de solución	22
2.1. Descripción general del algoritmo	22
2.2. Estructura de los modelos de bloques	23
2.2.1. Estructura de datos para el modelo de bloques	24
2.3. Algoritmo para el cálculo del volumen y tonelaje	25

2.3.1.	Indexación de los triángulos de la restricción geométrica	26
2.3.2.	Creación de los segmentos de líneas	28
2.3.3.	Recorte y ajuste de los segmentos de líneas	30
2.3.4.	Cálculo del volumen y el tonelaje del material contenido en un bloque	34
2.4.	Conclusiones parciales	35
3.	Análisis de resultados	37
3.1.	Efectividad del método de cálculo del volumen parcial	37
3.2.	Resultados de cálculo de tonelaje en un caso de estudio	41
3.2.1.	Caso de estudio: modelo de bloques de la región O48	41
3.2.2.	Comparación con un software profesional	43
3.3.	Análisis de la complejidad del algoritmo	46
3.4.	Análisis del rendimiento del algoritmo	47
3.5.	Conclusiones parciales	49
	Conclusiones	50
	Recomendaciones	51
	Referencias bibliográficas	56

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	<i>Cálculo del volumen del material contenido en un dominio geométrico, las zonas grises representan los volúmenes calculados. (a) Volumen calculado utilizando los bloques cuyos centros están contenidos en el dominio geométrico. (b) Volumen calculado utilizando los bloques contenidos total o parcialmente en el dominio geométrico. (c) Volumen real del material contenido en el dominio geométrico.</i>	3
1.1.	<i>Gráfica del semivariograma, la curva discontinua describe el semivariograma experimental y la curva sólida describe el semivariograma ajustado al modelo esférico.</i>	10
1.2.	<i>Secciones transversales de una superficie de terreno.</i>	11
1.3.	<i>Prismas formados a partir de una superficie proyectada.</i>	12
1.4.	<i>Malla de tetraedros correspondiente a una zona mineralizada.</i>	13
1.5.	<i>Modelo de bloques.</i>	15
1.6.	<i>Modelo de bloques con leyes minerales estimadas.</i>	15
1.7.	<i>Superficies dentro de un modelo de bloques utilizadas como restricciones geométricas.</i>	16
1.8.	<i>Sección transversal de un modelo de bloques en la cual se muestran los bloques utilizados para el cálculo del volumen y el tonelaje a partir de una superficie. En la imagen (b) se resalta el material contenido en los bloques fronteras.</i>	17
1.9.	<i>Ortoedros formados en el método de subdivisión recursiva por octantes.</i>	19
1.10.	<i>Prismas formados por la proyección de la superficie dentro del bloque.</i>	19
1.11.	<i>Proyección de los polígonos a la base de los bloques.</i>	20
1.12.	<i>Ortoedros formados por el método de las agujas.</i>	20

2.1.	<i>Representación bidimensional de diferentes escenarios de dominios geométricos utilizados en el cálculo del volumen y el tonelaje de materiales en modelos de bloques.</i>	23
2.2.	<i>Origen del modelo de bloques ubicado en el vértice inferior izquierdo del bloque de color gris.</i>	24
2.3.	<i>Representación bidimensional de un rango ortogonal de índices, donde cada segmento de línea representa un triángulo de la restricción geométrica.</i>	28
2.4.	<i>Patrones analizados para ubicar los segmentos de líneas dentro de un bloque.</i>	29
2.5.	<i>Representación bidimensional del ajuste de los segmentos de líneas dado una restricción geométrica.</i>	31
2.6.	<i>Sección transversal de un bloque donde se muestran los segmentos de líneas utilizados para obtener el coeficiente de volumen aproximado del material contenido.</i>	34
3.1.	<i>Superficies matemáticas utilizadas para el cálculo del coeficiente de volumen dentro de un bloque utilizando segmentos de líneas.</i>	39
3.2.	<i>Gráfica comparativa de las curvas de efectividad por cada superficie utilizada.</i>	40
3.3.	<i>Leyenda de colores aplicada a los bloques del modelo después de calculado el volumen del material contenido.</i>	42
3.4.	<i>Resultados del cálculo del volumen del material contenido en los bloques bajo la superficie del terreno en el modelo de bloques de la región O48.</i>	42
3.5.	<i>Resultados del cálculo del volumen del material contenido entre dos superficies abiertas en el modelo de bloques de la región O48.</i>	43
3.6.	<i>Resultados del cálculo del volumen del material contenido dentro de un dominio geométrico cerrado en el modelo de bloques de la región O48.</i>	43
3.7.	<i>Gráfica de barras comparativa, con los resultados obtenidos en el cálculo del volumen por el algoritmo desarrollado y por el sistema Gemcom-Gems en cada sección horizontal del modelo de bloques.</i>	44
3.8.	<i>Comparación entre los volúmenes calculados por el algoritmo desarrollado y por el sistema Gemcom-Gems en dos secciones horizontales.</i>	44
3.9.	<i>Gráficas de los resultados del consumo de memoria RAM y el tiempo de ejecución.</i>	49

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Resultados del cálculo del volumen entre las superficies matemáticas y la base del bloque.	39
3.2. Resultados del cálculo del coeficiente de volumen aproximado por cada superficie. . .	40
3.3. Valores de la efectividad del método de cálculo del volumen aproximado.	41
3.4. Resultados del cálculo del volumen y el tonelaje de Fe en las secciones horizontales del modelo de bloques de la región O48	45
3.5. Complejidades algorítmicas de las operaciones fundamentales realizadas en el algoritmo desarrollado.	46
3.6. Dimensiones de los modelos de bloques en la prueba de rendimiento.	48
3.7. Resultados del consumo de memoria y el tiempo de ejecución.	48

Introducción

La explotación de los recursos minerales que yacen en el subsuelo de la corteza terrestre, ha sido una de las actividades fundamentales desarrolladas por el hombre a lo largo de la historia de la humanidad. Muchos de los productos derivados de los minerales han sido utilizados en la construcción de infraestructuras, elaboración de maquinarias y como fuentes de energía, elevando el bienestar, la calidad de vida y el desarrollo socioeconómico de la sociedad [Ortiz and Herrera, 2002]. En aras de aumentar la explotación racional de los recursos minerales, el hombre ha desarrollado nuevas herramientas y tecnologías, apoyándose en los avances científicos de las diversas ramas asociadas a las Geociencias.

Actualmente la industria minera es considerada como una de las principales industrias que promueve el desarrollo de la economía mundial. La misma se encuentra dividida en dos grupos fundamentales, la minería a cielo abierto y la minería subterránea. En la minería a cielo abierto el proceso de extracción de mineral se realiza en la superficie del terreno. Este tipo de minería es considerado como el sector más amplio dentro de la Minería y se emplea para la extracción de más del 60 % de las materias primas demandadas a nivel mundial [Ortiz and Herrera, 2002].

Durante el desarrollo de un proyecto minero es necesario cuantificar los recursos y reservas minerales determinando el volumen, el tonelaje y la ley mineral [Sinclair and Blackwell, 2002]. Para cuantificar los recursos y reservas minerales el yacimiento se divide en regiones volumétricas y por cada región se estiman las leyes minerales a partir de los valores geoquímicos obtenidos mediante perforaciones realizadas al yacimiento [Glacken and Snowden, 2001].

Tradicionalmente los recursos y reservas minerales se cuantificaban mediante estimaciones globales [Sinclair and Blackwell, 2002], las cuales utilizaban métodos empíricos de interpolación espacial. En las estimaciones globales el yacimiento se divide en grandes regiones volumétricas, teniendo en

cuenta un área de influencia determinada a partir de la ubicación espacial de los pozos de perforación y el contenido de los valores geoquímicos del pozo. Estas estimaciones producen resultados poco confiables los cuales afectan negativamente la producción minera y traen gastos económicos considerables.

En aras de disminuir los errores de aproximación producidos en las estimaciones globales de las leyes minerales y en los cálculos del volumen, se empezó a realizar estimaciones locales. En las estimaciones locales el yacimiento se divide en pequeñas regiones y las leyes minerales se estiman empleando métodos matemáticos más complejos. A partir 1950 [Matheron, 1963] y [Krige, 1976] comenzaron a desarrollar la Teoría de la Variable Regionalizada la cual permite la estimación local de las leyes minerales teniendo en cuenta su variación espacial. Los modelos matemáticos desarrollados a partir de esta teoría permitieron aumentar la precisión en las estimaciones de las leyes minerales y además permitieron conocer el error de la estimación.

En la Teoría de las Variables Regionalizadas se emplean criterios estadísticos para determinar la correlación espacial de los valores geoquímicos muestreados en el yacimiento. Esta teoría se generalizó en la Geoestadística [Deutsch and Journel, 1992, Houlding, 2000, Delfiner et al., 2009, David, 2012], utilizada fundamentalmente en el estudio del comportamiento caótico de las mineralizaciones [Cuador and Estévez, 2004]. Las estimaciones basadas en métodos geoestadísticos se realizan a través de sistemas de cómputos y los resultados obtenidos son registrados en modelos de bloques.

Un modelo de bloques es un arreglo de celdas tridimensionales en forma de paralelepípedos rectangulares, en las cuales se registran los principales atributos geotécnicos del yacimiento mineral. Actualmente los modelos de bloques son utilizados para planificar y controlar la producción minera. Los modelos de bloques facilitan la elaboración del inventario de los recursos y reservas minerales del yacimiento. Para este inventario los recursos minerales se clasifican según su factibilidad económica teniendo en cuenta los estándares internacionales establecidos por organizaciones como la JORC¹, de Australia, la CIM² de Canadá y la SME³ de Estados Unidos [SME, 1999, Rendu and N., 2001].

Para llevar un control eficiente de la producción minera, es necesario determinar con precisión la cantidad de recursos minerales extraídos y remanentes en el yacimiento. En el caso particular de

¹Joint Ore Reserves Committee

²Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum

³US Society for Mining, Metallurgy and Exploration

la minería a cielo abierto, el volumen del material extraído se puede obtener evaluando el volumen comprendido entre dos superficies de terreno en un rango de fechas diferentes. De forma general para cualquier tipo de minería, el volumen material extraído se determina a partir de un dominio geométrico cerrado. De manera similar, el tonelaje del material extraído, se determina teniendo en cuenta el volumen, la densidad de la roca y las leyes minerales almacenadas en las celdas del modelo de bloques.

En [Houlding, 1999] se considera que las principales deficiencias en la cuantificación de recursos y reservas minerales son los errores de aproximación en las estimaciones geoestadísticas y los errores volumétricos. Aunque los modelos de bloques ayuden en la estimación de los recursos y reservas minerales, dificultan la cuantificación dentro de un dominio geométrico cerrado. Esto se debe principalmente a que la geometría de los bloques no se ajusta a la morfología del dominio geométrico y también resulta complejo determinar la posición relativa de los bloques con respecto al dominio geométrico.

En muchas ocasiones se reportan los recursos y reservas minerales utilizando los bloques contenidos en un dominio geométrico, sin tener en cuenta el volumen del material contenido en los bloques fronteras. Esto trae consigo una baja de precisión en el cálculo del volumen y el tonelaje en modelo de bloques. La mayoría de las herramientas informáticas utilizadas en las empresas mineras cubanas calculan ineficazmente el tonelaje del material contenido dentro de un dominio geométrico, ver Figura (1) (a) y (b). Algunas de estas herramientas consideran que un bloque está dentro del dominio a partir de la posición relativa de su centro.

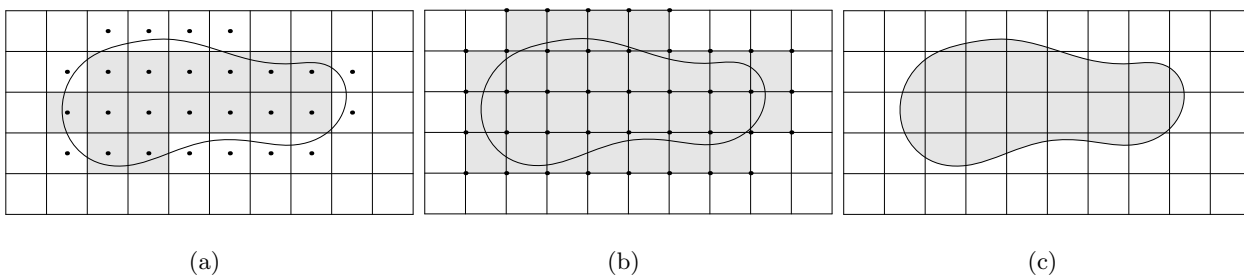


Figura 1: *Cálculo del volumen del material contenido en un dominio geométrico, las zonas grises representan los volúmenes calculados. (a) Volumen calculado utilizando los bloques cuyos centros están contenidos en el dominio geométrico. (b) Volumen calculado utilizando los bloques contenidos total o parcialmente en el dominio geométrico. (c) Volumen real del material contenido en el dominio geométrico.*

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se arriba al siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo determinar eficazmente el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico en un yacimiento mineral?

El **objeto de estudio** consiste en la cuantificación de los recursos y reservas minerales, específicamente en los métodos de cálculo del volumen y el tonelaje del material existente dentro de un dominio geométrico en modelos de bloques, lo cual constituye el **campo de acción**.

Para brindarle una solución efectiva al problema, se plantea como **objetivo general**, desarrollar un algoritmo que calcule eficazmente sobre un modelo de bloques, el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico, teniendo en cuenta el volumen parcial del material existente en los bloques fronteras.

La **hipótesis** del presente trabajo se expresa a continuación: Si se implementa un algoritmo que calcule sobre un modelo de bloques, el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico, teniendo en cuenta el volumen parcial del material existente en los bloques fronteras, entonces se podrá determinar eficazmente el tonelaje de los materiales existentes dentro de un dominio geométrico en un yacimiento mineral.

En la presente investigación la eficacia en el cálculo del tonelaje se determinará a partir de la efectividad del método de cálculo del volumen que se utilice en la propuesta de solución. Para cumplir con el objetivo general de la investigación se definen las siguientes tareas investigativas:

- Caracterizar los principales métodos de cálculo utilizados en la cuantificación de los recursos y reservas minerales.
- Identificar un método para calcular el volumen parcial del material contenido en los bloques fronteras.
- Diseñar e implementar un algoritmo que calcule el volumen y el tonelaje de material existente dentro de un dominio geométrico en modelos de bloques.
- Implementar una herramienta informática que calcule el tonelaje utilizando el algoritmo diseñado y que visualice los resultados obtenidos de forma tridimensional.
- Determinar a partir de pruebas, la efectividad del método del cálculo del volumen parcial en los bloques fronteras empleado en el algoritmo desarrollado.

- Comparar los resultados del cálculo del tonelaje del algoritmo desarrollado con los resultados obtenidos por un software profesional.

Durante el desarrollo de la investigación se utilizaron diferentes métodos científicos para el procesamiento de la información recopilada y para darle cumplimiento al objetivo general del presente trabajo.

Dentro de los **métodos teóricos** se utilizaron los métodos *histórico-lógico*, *analítico-sintético* y el *hipotético-deductivo*. El método *histórico-lógico* se utilizó para analizar la evolución de los diferentes métodos de cálculo utilizados para cuantificar los recursos y reservas minerales. El método *analítico-sintético* se utilizó para analizar las diferentes problemáticas existentes en la investigación y determinar las posibles variantes de solución. El método *hipotético-deductivo* se utilizó para elaborar las conclusiones de los resultados obtenidos en la investigación.

Dentro de los **métodos empíricos** se utilizaron los métodos *análisis documental* y *experimental*. El método *análisis documental* se utilizó para revisar los documentos especializados en los temas referentes a la presente investigación. El método *experimental* se utilizó para comprobar los resultados y el comportamiento del algoritmo desarrollado bajo un ambiente controlado.

Estructura del documento

El documento se encuentra estructurado en tres capítulos, los cuales se describen a continuación. En el **Capítulo 1** *Fundamentación teórica*, se describen los principales métodos de cálculo empleados para cuantificar los recursos y reservas minerales y también se analizan otros métodos empleados para obtener el volumen parcial del material contenido en modelos de bloques restringidos geoméricamente.

En el **Capítulo 2** *Propuesta de solución*, se describen los pasos del algoritmo desarrollado para calcular sobre un modelo de bloques el volumen y el tonelaje del material contenido en dominio geométrico. También se explica el método empleado para determinar el coeficiente de volumen aproximado del material contenido dentro de un bloque.

En el **Capítulo 3** *Análisis de resultados*, se analiza primeramente la efectividad del método empleado para determinar el coeficiente del volumen del material contenido en los bloques y después se analizan los resultados arrojados por el algoritmo desarrollado.

Por último se establecen en el documento las *Conclusiones*, *Recomendaciones* y las *Referencias Bibliográficas* utilizadas durante la investigación.

CAPÍTULO 1

Fundamentación teórica

En este capítulo se introducen algunos temas asociados al dominio del problema para facilitar la comprensión del contenido de la investigación. Primeramente se explican los principales métodos matemáticos empleados en la cuantificación de los recursos y reservas minerales, los cuales están enfocados al cálculo de la ley mineral, el volumen y el tonelaje. Después se describen brevemente algunas de las características de los modelos de bloques y por último se realiza un análisis de las principales soluciones existentes para el cálculo del volumen y el tonelaje en modelos de bloques.

1.1. Elementos asociados al dominio del problema

El principal objetivo de la Minería es la extracción de los recursos minerales que se encuentran en el subsuelo de la corteza terrestre, de forma tal, que las operaciones realizadas en este proceso produzcan resultados económicos. En [Ortiz and Herrera, 2002], se define un mineral como *“la sustancia del reino mineral que investigada, extraída, concentrada, transportada y vendida produce un beneficio económico”*. En la Minería los recursos minerales cuya extracción sea económicamente factible son catalogados como reservas minerales.

Para clasificar los recursos minerales en reservas minerales, se debe tener en cuenta la ley mineral y la ley de corte. Según [Ortiz and Herrera, 2002], se puede definir a la ley mineral como *“el contenido o concentración de un determinado elemento o compuesto en una región de un yacimiento”* y la ley de corte como *“el contenido o concentración mínima aceptable que debe tener un*

elemento o compuesto para ser considerado como mineral”.

1.2. Cuantificación de los recursos y reservas minerales

En la Minería, los recursos y reservas minerales son cuantificados a partir de la ley mineral, el volumen y el tonelaje. Para determinar la ley mineral, el yacimiento se divide en regiones volumétricas y por cada región se estima un valor de ley utilizando un método de interpolación espacial. En dependencia del tipo de estimación realizada, global o local, el volumen de cada región se puede calcular utilizando métodos tradicionales de cálculo de volumen de la Ingeniería Civil conocidos como *Earthworks* [Gillette, 1920]. El tonelaje de cada región se calcula multiplicando el volumen por la densidad media de la roca.

1.2.1. Métodos de estimación de recursos minerales

Los métodos de estimación de recursos minerales se utilizan para determinar un valor aproximado de las concentraciones o leyes minerales dentro de una región del yacimiento mineral o en toda su extensión. Estos métodos de estimación se basan en algoritmos de interpolación espacial, en los cuales se determinan las leyes minerales $z^*(u)$ utilizando la ecuación (1.1). En la ecuación (1.1) la variable estimada $z^*(u)$ es igual a la suma ponderada de las variables muestreadas $z_i(u)$ en una región del espacio, en esta misma ecuación λ_i es el peso o ponderación que se le asigna a cada variable muestreada.

$$z^*(u) = \sum_{i=1}^N \lambda_i * z_i(u) \quad (1.1)$$

Los métodos de estimación de recursos minerales se pueden clasificar en locales y globales, de acuerdo al alcance de la estimación dentro del yacimiento y también se pueden clasificar en tradicionales y geoestadísticos en dependencia del algoritmo de interpolación espacial utilizado en la estimación.

Métodos tradicionales de estimación

Los métodos tradicionales de estimación de recursos minerales utilizan algoritmos de interpolación simples, los cuales son fáciles de utilizar para realizar cálculos manuales pero sus resultados

son poco confiables, ya que no tienen en cuenta la variación espacial de las leyes minerales. Dentro de los métodos tradicionales de estimación los más utilizados son el método de los polígonos y el método inverso de la distancia.

El **método de los polígonos** se basa en asignar a cada punto de una región del espacio el valor de ley mineral de la muestra más próxima. Para esto el yacimiento se divide en varias regiones S_i aplicando el algoritmo de *Voronoi* [Du et al., 1999, Okabe et al., 2009]. En este método la ley estimada $z^*(u)$ se calcula utilizando la ecuación (1.2).

$$z^*(u) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N V_i * z_i(u) \quad (1.2)$$

En la ecuación (1.3), V_i es el volumen de cada prisma formado a partir de un área de influencia S_i y el volumen total V viene dado por la sumatoria de todos los volúmenes V_i como se muestra en la ecuación (1.3).

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (1.3)$$

El **método del inverso de la distancia** se basa en asignarle mayor peso a las muestras más cercanas al punto de estimación. En este método la ponderación es igual a $\lambda = 1/d_i^\alpha$, donde d_i es la distancia que existe entre la variable estimada $z^*(u)$ y una variable muestreada $z_i(u)$ y el exponente α será un número entero positivo mayor que cero. La ecuación (1.4) expresa de forma general la estimación de una variable $z^*(u)$ utilizando el método del inverso de la distancia.

$$z^*(u) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i(u)}{d_i^\alpha}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i^\alpha}} \quad (1.4)$$

Este método es muy utilizado en estimaciones locales, pero no funciona correctamente con agrupaciones de datos. De todos los métodos tradicionales de estimación, el inverso de la distancia es el más certero y es utilizado también para realizar estimaciones asistidas por computadoras.

Métodos geoestadísticos

Los métodos de estimación geoestadísticos se basan en la Teoría de las Variables Regionalizadas descritas por [Matheron, 1963]. En [Alfaro, 2007] se define a una variable regionalizada como

“la función que representa la variación en el espacio de cierta magnitud asociada a un fenómeno natural”. Según [Alfaro, 2007] la Teoría de las Variables Regionalizadas tiene dos objetivos fundamentales:

- Expresar las características estructurales de una variable regionalizada mediante una forma matemática adecuada.
- Resolver de manera satisfactoria el problema de la estimación de una variable regionalizada a partir de un conjunto de muestras, asignando errores a las estimaciones.

La mineralización en los yacimientos minerales presenta un comportamiento caótico a escala local y estructural a gran escala [Cuador and Estévez, 2004]. Este fenómeno se puede interpretar como una función aleatoria, donde a cada punto en el espacio se le asigna una variable aleatoria $z(u)$. Para dos puntos en el espacio p_1 y p_2 se tendrán dos variables aleatorias $z_1(u)$ y $z_2(u)$ diferentes pero no independientes, donde su función de correlación espacial determina el grado de continuidad de la mineralización.

El **variograma** es la herramienta fundamental utilizada en la geoestadística para determinar la correlación y variación espacial de las variables muestreadas. Según [Armstrong and Carignan, 1997] se necesita utilizar dos tipos de variogramas para realizar el análisis estructural de las variables aleatorias, específicamente el variograma experimental y el variograma teórico, como se muestra en la Figura (1.1).

El semivariograma experimental es definido por [Journel and Huijbregts, 1978] como la media aritmética de todos los cuadrados de las diferencias entre pares de valores separados a una distancia h . El semivariograma se denota por la función $\gamma(h)$, la cual se expresa en la ecuación (1.5).

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i + h) - z(x_i)]^2 \quad (1.5)$$

En la ecuación (1.5), $N(h)$ es el número de pares de muestras, h es el incremento, $z(x_i)$ son los valores de las variables muestreadas y x_i son las coordenadas espaciales de las variables. Después de construido el semivariograma experimental, se debe construir el semivariograma teórico, el cual se corresponde al ajuste del variograma experimental con una función teórica como se muestra en la Figura (1.1). Dentro de los modelos teóricos utilizados para ajustar semivariogramas experimentales se destacan los siguientes:

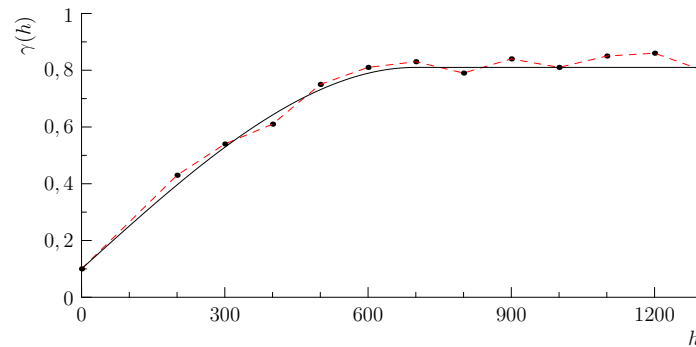


Figura 1.1: Gráfica del semivariograma, la curva discontinua describe el semivariograma experimental y la curva sólida describe el semivariograma ajustado al modelo esférico.

- Modelo efecto pepita.
- Modelo esférico.
- Modelo exponencial.
- Modelo Gaussiano.

El método fundamental de estimación que se utiliza en la geoestadística se conoce como **krigeado** y tiene como objetivo encontrar el mejor Estimador Lineal Insesgado [Cuador and Estévez, 2004, Alfaro, 2007]. El nombre del krigeado proviene de los trabajos realizados por Daniel Krige [Krige, 1976] en las minas de oro sudafricanas en los años 1950, décadas más tarde la teoría fue normalizada por el matemático francés Georges Matheron [Matheron, 1963]. Dentro de los principales métodos krigeado se encuentran:

- Kriging Simple
- Kriging Ordinario
- Kriging Universal
- Kriging de Indicadores
- Kriging Gaussiano

El krigeado determina el valor de la variable estimada $z^*(u)$ mediante la combinación lineal de los pesos λ_i asignados a las variables muestreadas $z_i(u)$ teniendo en cuenta su correlación y variación

espacial, lo cual permite minimizar la varianza de la estimación. Según [Cuador and Estévez, 2004, Estévez, 2009] para que el krigeado sea el mejor Estimador Lineal Insesgado se tiene que cumplir que:

1. Sea insesgado, $E[z^*(u) - z(u)] = 0$.
2. La varianza $Var[z^*(u) - z(u)]$ sea mínima.

1.2.2. Métodos de cálculo del volumen

En la Minería el cálculo del volumen de las reservas minerales extraídas se realiza utilizando métodos tradicionales de la Topografía y de la Ingeniería Civil conocidos como *Earthworks* [Gillette, 1920, Fink, 2003, Awange and Kyalo, 2013]. También se emplean otros métodos de cálculo utilizados por herramientas de diseño asistido por computadoras, más conocidas por sus siglas en inglés CAD¹, los cuales se basan en mallas poligonales cerradas. Dentro de los principales métodos de cálculo de volumen se encuentran el método de las secciones transversales, el método de los modelos digitales de superficies y el método basado en superficies cerradas.

El **método de las secciones transversales** se basa en la creación de una serie de planos paralelos transversales al yacimiento mineral. Por cada sección transversal se forma un polígono teniendo en cuenta la superficie del terreno y una base inferior. El volumen del yacimiento se calcula a partir de poliedros formados entre las secciones contiguas, como se muestra en la Figura (1.2). El volumen formado entre dos secciones contiguas se calcula utilizando las ecuaciones (1.6) y (1.7).

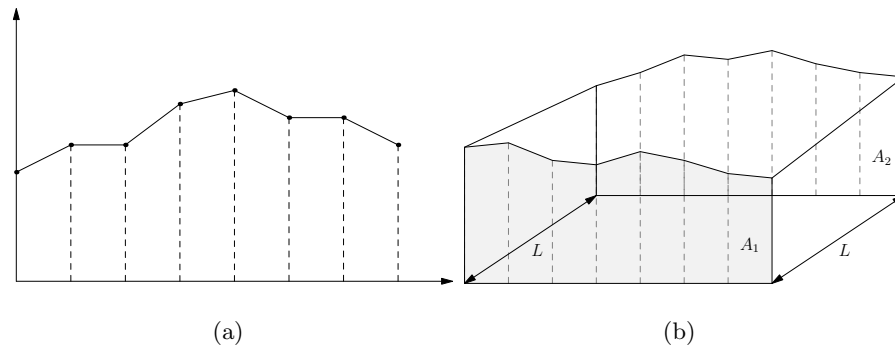


Figura 1.2: Secciones transversales de una superficie de terreno.

En la ecuación (1.6) se determina el volumen promediando las áreas de los polígonos de dos secciones transversales contiguas y multiplicándola por la distancia de separación. La ecuación (1.7)

¹Computer Aided Design

conocida como ecuación de *Newton* [Clark, 1951, Deakin, 2005], es una mejora de la ecuación (1.6) y la misma permite una mayor precisión en el cálculo del volumen del poliedro formado.

$$V = L \times \frac{A_1 + A_2}{2} \tag{1.6}$$

$$V = \frac{L}{6} \times (A_1 + 4A_m + A_2) \tag{1.7}$$

El **método de los modelos digitales de superficies** es el más utilizado actualmente por las herramientas informáticas dedicadas a la Topografía y la Ingeniería Civil, esto se debe al avance tecnológico existente en la generación de Modelos Digitales de Terreno (MDT) de alta resolución [El-Sheimy et al., 2005, Peckham and Jordan, 2007]. En este método se proyectan los polígonos del MDT a un plano inferior formando prismas, como se muestra en la Figura (1.3).

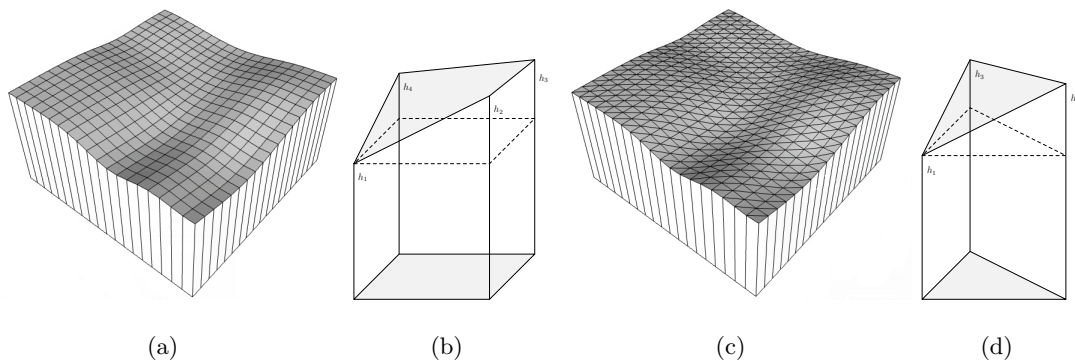


Figura 1.3: *Prismas formados a partir de una superficie proyectada.*

El volumen total se calcula sumando el volumen de todos los prismas generados. En este método se utilizan tradicionalmente mallas poligonales triangulares y rectangulares. En el caso de los prismas formados por mallas triangulares, el volumen se calcula mediante la ecuación (1.9). De forma similar ocurre con los prismas formados a partir de mallas rectangulares, en los cuales el volumen de los prismas se determina mediante la ecuación (1.8).

$$V_p = \frac{A}{4} \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \tag{1.8}$$

$$V_p = \frac{A}{3} \times (h_1 + h_2 + h_3) \tag{1.9}$$

En el **método basado en superficies cerradas** el volumen se calcula utilizando el algoritmo *Polyhedral Mass Properties* [Lee and Requicha, 1982, Mirtich, 1996]. Las superficies cerradas se

modelan mediante mallas poligonales, las cuales se construyen en herramientas CAD profesionales. Una de las limitaciones de este algoritmo es que la superficie cerrada debe cumplir con el teorema de *Jordan* [Dostal and Tindell, 1978, Hales, 2007a, Hales, 2007b]. Para aplicar este algoritmo se debe validar que la malla poligonal esté completamente cerrada y que la normal de todos los polígonos esté orientada hacia afuera.

Otra forma de calcular el volumen a partir de una malla poligonal cerrada es convirtiéndola a una malla de prismas simples. Para lograr este objetivo se pueden utilizar algoritmos de triangulaciones tridimensionales como el *Delaunay 3D* [Frey et al., 1996, Yang et al., 2005], el cual permite obtener una malla de tetraedros, como se muestra en la Figura (1.4).

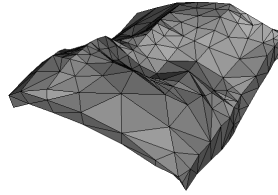


Figura 1.4: Malla de tetraedros correspondiente a una zona mineralizada.

1.2.3. Métodos de cálculo del tonelaje

Los métodos de cálculo del tonelaje de los recursos y reservas minerales, están estrechamente relacionados con los métodos de estimación de las leyes minerales y con los métodos de cálculo del volumen de cada región del yacimiento. Para calcular el tonelaje se tiene en cuenta la densidad promedio de la roca contenida en cada región. Según [Estévez, 2009], el tonelaje total del yacimiento se calcula utilizando la ecuación (1.10), en la cual V_i es el volumen de cada región, ρ es la densidad de la roca y $z^*(u)$ es la ley mineral estimada.

$$T = \sum_{i=0}^N V_i * \rho * z^*(u) \quad (1.10)$$

Los métodos tradicionales de cálculo del tonelaje se realizan en dependencia de los métodos tradicionales de estimación de leyes. Según [Lepin and Ariosa, 1986], los métodos tradicionales más conocidos son:

- Método del promedio aritmético o bloques análogos.

- Método de los bloques geológicos.
- Método de los bloques de explotación.
- Método de los polígonos.
- Método de las isolíneas o contornos.
- Método de los perfiles.

Estos métodos tradicionales tienen como principal ventaja su simplicidad, la cual permite obtener una estimación preliminar de los recursos y reservas minerales de un yacimiento. La principal desventaja de estos métodos, radica en las técnicas de estimación de los recursos minerales empleadas, en la geometría de los bloques que no se adaptan a los métodos de explotación minera y que no reflejan correctamente la morfología real del yacimiento.

Los métodos tradicionales han sido reemplazados por los métodos asistidos por computadoras, los cuales brindan resultados más confiables. Los métodos asistidos por computadoras dividen al yacimiento mineral en regiones tridimensionales más pequeñas, cuyas dimensiones son compatibles con las unidades de selección mineras. Este conjunto de celdas formadas, es conocido como modelo de bloques. Otra característica de estos métodos de cálculo del tonelaje, es que determinan las leyes minerales de las celdas utilizando métodos de estimación asistidos por computadoras, principalmente métodos geoestadísticos.

1.3. Modelos de bloques

Los modelos de bloques son la técnica de modelado geológico más utilizada por los sistemas informáticos dedicados a la industria minera. La misma consiste en dividir al yacimiento en celdas tridimensionales en forma de ortoedros, comúnmente llamados bloques, como se muestra en la Figura (1.5). En cada bloque del modelo se registran los principales atributos geotécnicos del yacimiento mineral. Tradicionalmente cuando se crea un modelo de bloques, las dimensiones de sus celdas se hacen coincidir con las dimensiones de una unidad de selección minera [Journel, 1980, Assibey-Bonsu and Krige, 1999, Sinclair and Blackwell, 2002].

Los modelos de bloques constituyen en la actualidad, la base fundamental para la estimación de las leyes minerales utilizando algoritmos de interpolación espacial asistidos por computadoras.

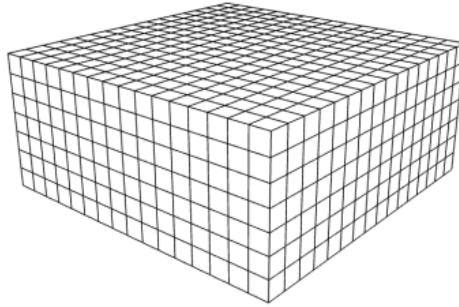


Figura 1.5: *Modelo de bloques.*

Los principales algoritmos utilizados para la estimación de las leyes minerales sobre modelos de bloques son el inverso de la distancia y el kriging. Los modelos de bloques que contienen valores de leyes minerales estimadas son llamados modelos de recursos. La variación de las leyes minerales en un modelo de bloques se puede apreciar aplicando leyendas de colores, como se muestra en la Figura (1.6).

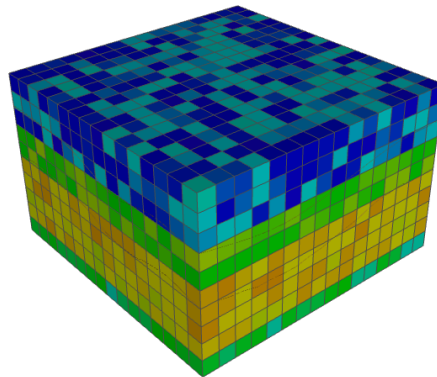


Figura 1.6: *Modelo de bloques con leyes minerales estimadas.*

Los modelos de bloques se pueden rotar con respecto a la orientación espacial de la zona mineralizada contenida en el mismo, este tipo de modelo se conoce como modelo de bloques rotado. La mayoría de los sistemas informáticos destinados a la industria minera solo permiten rotar el modelo de bloques con respecto a la vertical.

Aunque los modelos de bloques proporcionan muchas ventajas en la planificación y control de los recursos minerales, la geometría de sus bloques dificulta su adaptación a la morfología real del yacimiento mineral. La solución brindada por varios sistemas informáticos mineros consiste en

subdividir los bloques fronteras con las zonas mineralizadas y superficies del terreno.

1.3.1. Dominios geométricos en modelo de bloques

Los dominios geométricos o restricciones geométricas representan zonas mineralizadas, capas litológicas, superficies de terreno u otras estructuras geológicas de interés. En la mayoría de los sistemas informáticos mineros los dominios geométricos son modelados mediante redes de triángulos irregulares, conocidas por sus siglas en inglés TIN² [Peucker et al., 1978, Olender and CA., 1980, De Floriani and Magillo, 2009]. Los dominios geométricos, ver Figura (1.7), son utilizados en la asignación de valores a los bloques contenidos en el mismo, para subdividir los bloques fronteras con este y para realizar cálculos de volumen y tonelaje de recursos y reservas minerales.

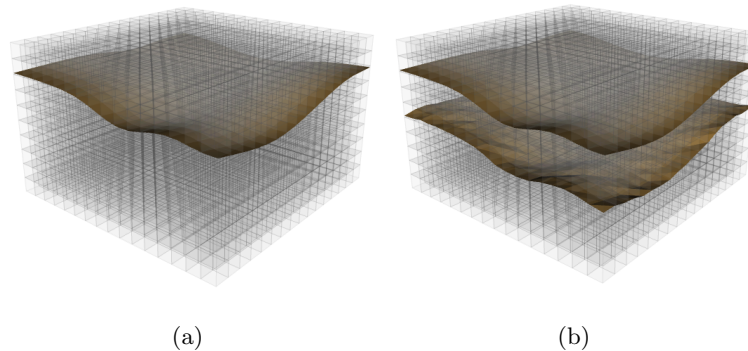


Figura 1.7: *Superficies dentro de un modelo de bloques utilizadas como restricciones geométricas.*

1.3.2. Cálculo del volumen y tonelaje dentro de dominios geométricos

El cálculo del volumen y tonelaje del material existente dentro de un dominio geométrico utilizando modelos de bloques, se ha convertido en una de las formas habituales de reportar los recursos y reservas minerales. Este proceso resulta complejo producto a los métodos numéricos de cálculo del volumen utilizados y a los algoritmos de Geometría Computacional empleados para identificar los bloques dentro del dominio geométrico.

La mayoría de los sistemas informáticos mineros permiten calcular el volumen y el tonelaje del material existente en los bloques contenidos parcial o totalmente en el dominio geométrico, como se muestra en la Figura (1.8) (a). Esto se debe a la complejidad de determinar la posición relativa

²Triangular Irregular Network

de un bloque con respecto al dominio geométrico.

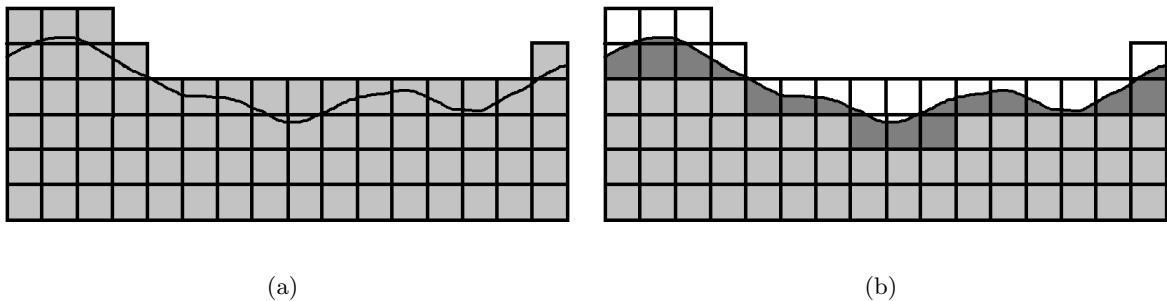


Figura 1.8: *Sección transversal de un modelo de bloques en la cual se muestran los bloques utilizados para el cálculo del volumen y el tonelaje a partir de una superficie. En la imagen (b) se resalta el material contenido en los bloques fronteras.*

La mayoría de los sistemas informáticos mineros consideran que un bloque está dentro del dominio geométrico si su centro está también dentro del dominio. Este tipo de consideración aumenta el error en el cálculo del volumen y una de las soluciones empleadas por estos sistemas para aumentar la precisión de los cálculos consiste en subdividir los bloques fronteras.

El cálculo del volumen del material existente en los bloques fronteras con el dominio geométrico es otro de los problemas fundamentales en la cuantificación de los recursos y reservas en modelos de bloques. Aunque la subdivisión de los bloques fronteras disminuya el error de volumen, sigue siendo insuficiente para lograr una mayor precisión en estos cálculos.

1.4. Análisis de soluciones existentes

La mayoría de los sistemas informáticos mineros son privativos y de estos no se conoce con claridad la precisión de los métodos que emplean para calcular el volumen y tonelaje del material existente dentro de un dominio geométrico en modelos de bloques. En las ayudas y manuales de usuarios de estos sistemas, se explican superficialmente los métodos utilizados. A continuación se realiza un análisis de los principales métodos de cálculo de volumen utilizados por sistemas informáticos nacionales e internacionales, los cuales son de interés para la presente investigación.

1.4.1. Método de cálculo del sistema Tierra

El sistema *Tierra* [Legrá, 2006], es una aplicación informática desarrollada por el profesor Arístides Legra del Departamento de Matemáticas del Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa. El mismo integra el trabajo con modelos, planificación y control de la minería. Su objetivo principal es controlar los cálculos de las extracciones mineras [Legrá, 2010], desarrolladas en la empresa Ernesto Ché Guevara, la cual explota yacimientos lateríticos en la región oriental de Moa en Cuba.

Los yacimientos minerales de la empresa Ernesto Ché Guevara están divididos en regiones cuadradas con dimensiones de 300×300 metros y en cada región o bloque se perforan aproximadamente 81 pozos espaciados regularmente a una distancia de 33,3333 metros. Los cálculos de los volúmenes y tonelajes de los materiales extraídos se realizan teniendo en cuenta la intersección de los pozos de la red de explotación con la superficie del terreno y se utilizan modelos de recursos estimados por áreas de influencia y por métodos geoestadísticos.

Según [Legrá, 2010], el volumen del material es calculado fácilmente comparando los MDT de las diferentes excavaciones realizadas en el bloque pero resulta complejo determinar los valores de concentraciones de los elementos nocivos y útiles, así como la masa del material extraído.

1.4.2. Método de subdivisión

El método de subdivisión es empleado por los sistemas informáticos mineros *Surpac 6.3* y *Datamine Studio 3*. En este método se subdividen los bloques fronteras con el dominio geométrico y se considera que un bloque está contenido en el dominio geométrico a partir de las coordenadas de su centro, sin tener en cuenta la geometría del bloque. En el sistema *Surpac 6.3* los bloques se subdividen mediante el patrón de subdivisión recursiva en octantes, como se muestra en la Figura (1.9). En el sistema *Datamine Studio 3*, los bloques se subdividen sin tener en cuenta el patrón de subdivisión recursiva en octantes.

En este método de subdivisión, si se utiliza el patrón de subdivisión recursiva en octantes, la precisión depende de la cantidad de subdivisiones realizadas a los bloques fronteras. El sistema *Surpac 6.3* solo permite hasta 3 niveles de subdivisión, esta restricción está en consecuencia con el bajo rendimiento computacional que puede ocasionar la creación de nuevos bloques al modelo. Si se utilizan 3 niveles de subdivisión por cada bloque frontera, se estarían generando por cada uno de estos, hasta 512 bloques.

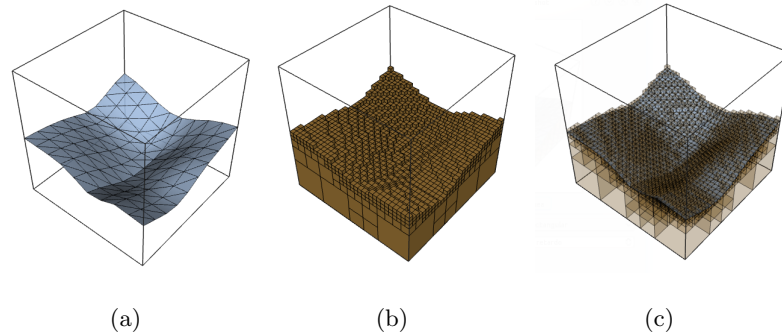


Figura 1.9: *Ortoedros formados en el método de subdivisión recursiva por octantes.*

1.4.3. Método de la superficie proyectada

En este método se proyecta la superficie del dominio geométrico a unas de las caras del bloque formando prismas, como se muestra en la Figura (1.10). En este método se recorta la malla poligonal del dominio geométrico con respecto a las caras del bloque, lo cual resulta complejo y costoso en cuanto a rendimiento computacional.

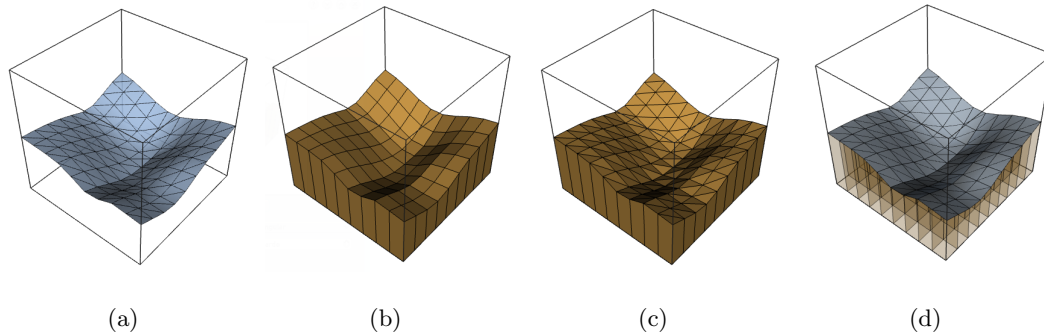


Figura 1.10: *Prismas formados por la proyección de la superficie dentro del bloque.*

Los prismas generados ofrecen una mayor precisión en el cálculo del volumen parcial existente en los bloques fronteras. En este método existen casos especiales en los cuales los polígonos de la malla se deben proyectar en la cara de otro bloque adyacente, como se muestra en la Figura (1.11). Una de las principales deficiencias de este método es que resulta difícil utilizarlo en restricciones geométricas cerradas.

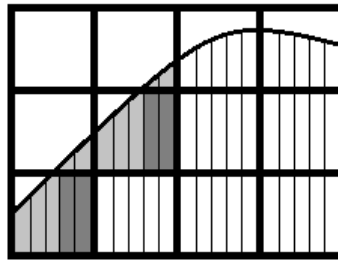


Figura 1.11: *Proyección de los polígonos a la base de los bloques.*

1.4.4. Método de las agujas

El método de las agujas o método de los segmentos de líneas es utilizado por el sistema *Gemcom-Gems 6.0* [Gemcom, 2010] para determinar el volumen parcial en los bloques fronteras. Este método se basa en el método integración numérica del punto medio, en el mismo se utilizan segmentos de líneas para la creación de los ortoedros entre la restricción geométrica y una de las caras del bloque, como se muestra en la Figura (1.12). El volumen total es calculado utilizando una suma de *Riemann* [Kurtz et al., 2004].

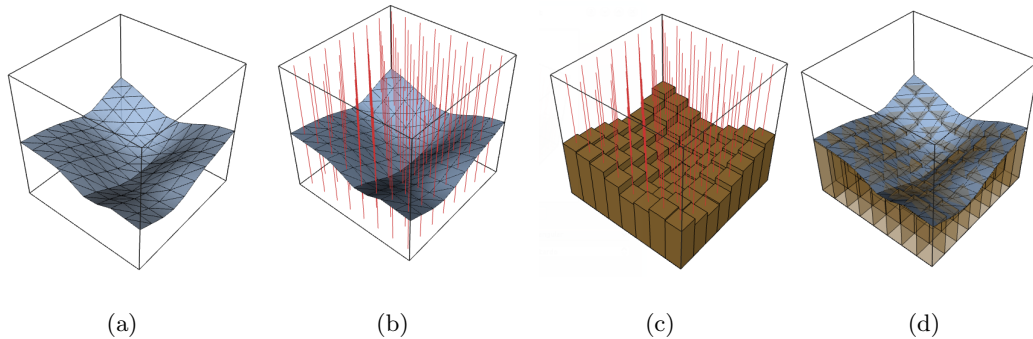


Figura 1.12: *Ortoedros formados por el método de las agujas.*

La precisión de este método depende de la cantidad de segmentos de líneas utilizados en el cálculo del volumen parcial. Entre las principales ventajas de este método se encuentra su adaptabilidad a varios escenarios de restricciones geométricas y a la simplicidad en las operaciones geométricas.

1.5. Conclusiones parciales

En la actualidad, la cuantificación de los recursos y reservas minerales se realiza con sistemas computacionales por la complejidad de los cálculos realizados. Los sistemas informáticos utilizados en la industria minera, han permitido elevar la calidad de los cálculos realizados mejorando la planificación estratégica y el control de la producción. Según el estudio realizado, se apreció un avance científico significativo en los métodos de estimación de recursos minerales, específicamente en los métodos geoestadísticos. En el caso del cálculo del volumen en modelos de bloques existe insuficiencia en la precisión de los resultados arrojados, lo cual se debe a la complejidad geométrica de los modelos de bloques y de los dominios geométricos.

CAPÍTULO 2

Propuesta de solución

En el presente capítulo se describe detalladamente el algoritmo desarrollado para calcular sobre un modelo de bloques, el volumen y el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico. Primeramente se describe de manera general el algoritmo, definiendo sus cuatro pasos fundamentales. Posteriormente se caracteriza la estructura de datos utilizada para el manejo de los modelos de bloques y por último se explican a través de pseudocódigos, las secuencias de pasos lógicos seguidas en el algoritmo.

2.1. Descripción general del algoritmo

El algoritmo desarrollado utiliza una variante propia del método de cálculo de las agujas, descrito anteriormente en la sección 1.4.4 del Capítulo 1. En esta variante se obtiene un volumen aproximado a partir del coeficiente de ocupación de los segmentos de líneas contenidos en los bloques del modelo. El algoritmo se diseñó para trabajar con modelos de bloques uniformes, recibiendo como entrada un modelo de bloques y las restricciones geométricas y dando como salida un modelo de bloques con los resultados del cálculo del volumen y el tonelaje del material contenido.

Las restricciones geométricas utilizadas deben estar acotadas a los límites geométricos del modelo de bloques y deben cumplir con los escenarios que se muestran en la Figura (2.1). En el primer escenario, Figura (2.1) (a), se tiene como restricción geométrica una superficie abierta para calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques que estén por encima o por debajo

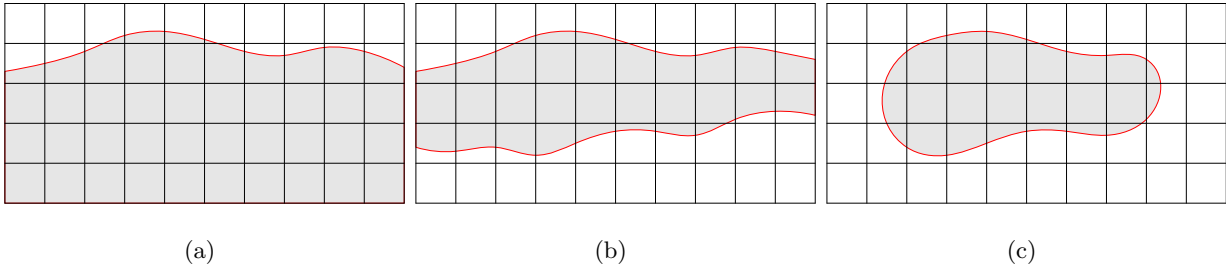


Figura 2.1: Representación bidimensional de diferentes escenarios de dominios geométricos utilizados en el cálculo del volumen y el tonelaje de materiales en modelos de bloques.

de la superficie. En el segundo escenario, Figura (2.1) (b), se tiene como restricción geométrica dos superficies abiertas para calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques que estén comprendidos entre las dos superficies. En este segundo escenario, las superficies no deben solaparse, ni cruzarse. En el tercer escenario, Figura (2.1) (c), se tiene como restricción geométrica una superficie cerrada para calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques que estén dentro de la superficie.

El algoritmo desarrollado consta de cuatro pasos fundamentales:

1. Indexar por cada columna del modelo de bloques, los triángulos de la restricción geométrica.
2. Crear los segmentos de líneas agrupados por columnas.
3. Reajustar los segmentos de líneas según los límites establecidos por la restricción geométrica.
4. Calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques a partir del coeficiente de ocupación de los segmentos de líneas.

2.2. Estructura de los modelos de bloques

El algoritmo desarrollado en la presente investigación utiliza modelos de bloques uniformes, sin rotaciones arbitrarias y los mismos presentan las siguientes características:

- El **origen** con coordenadas (x_0, y_0, z_0) , es el punto inicial ubicado en el vértice inferior izquierdo de la caja envolvente del modelo, como se muestra en la Figura (2.2).
- Las **dimensiones del modelo** $(nb_i \times nb_j \times nb_k)$, que representan las cantidades de bloques que tendrá el modelo a lo largo de los ejes coordenadas **i**, **j** y **k** relativos al origen del modelo.

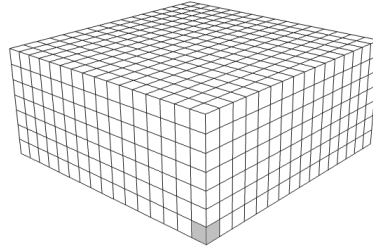


Figura 2.2: Origen del modelo de bloques ubicado en el vértice inferior izquierdo del bloque de color gris.

- Las **dimensiones de los bloques** ($lb_i \times lb_j \times lb_k$), que representan el ancho, largo y alto de cada bloque del modelo.
- El **nivel de resolución** nr_0 , que representa el nivel máximo de un árbol de 8 hijos y se calcula de la siguiente manera $nr_0 = \text{ceil}(\log_2(\max(nb_i, nb_j, nb_k)))$.

A partir de las características expresadas anteriormente, se puede expresar un modelo de bloques como $MB = \{(x_0, y_0, z_0), (nb_i \times nb_j \times nb_k), (lb_i \times lb_j \times lb_k), nr_0, M\}$, donde $M = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es el conjunto de los bloques del modelo y cada bloque del modelo tendrá las características que se describen a continuación:

- Las **coordenadas del centro** (x_c, y_c, z_c) .
- Las **extensiones del bloque** $(e_i \times e_j \times e_k)$, las cuales son las mitades de las dimensiones del bloque $(\frac{lb_i}{2} \times \frac{lb_j}{2} \times \frac{lb_k}{2})$ y representan la distancia existente entre el centro del bloque y sus caras opuestas.
- La **localización espacial** (i, j, k, l) , es un índice espacial para la optimización de las búsquedas espaciales realizadas sobre el modelo de bloques.
- El conjunto de los **atributos geotécnicos** del bloque. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

2.2.1. Estructura de datos para el modelo de bloques

En la presente investigación se utiliza una estructura de datos espaciales, similar a un *Linear Octree* [Meagher, 1982, Gargantini et al., 1989], para el almacenamiento y manejo eficiente de los modelos de bloques en la memoria RAM¹. Un *Linear Octree* es una versión más compacta de

¹Random Access Memory

un *Octree*, donde no se utilizan apuntadores para los nodos hijos, eliminando los nodos ramas y dejando solamente los nodos hojas del árbol. Los nodos hojas son almacenados en una *Tabla Hash* y el índice en la *Tabla Hash* es calculado según la localización espacial del nodo.

En la estructura de datos utilizada en la presente investigación, se le asigna un índice espacial $l_s = (i, j, k, l)$ a cada bloque del modelo. En este índice espacial, (i, j, k) es la localización espacial del bloque y l es el nivel de resolución. El índice l_s está codificado en 32 bits, donde los primeros 4 bits almacenan el nivel de resolución y los bits restantes almacenan la localización espacial (i, j, k) . La localización espacial se codifica utilizando el código de *Morton* [Gargantini et al., 1989, Asano et al., 1997, Pascucci and Frank, 2001].

2.3. Algoritmo para el cálculo del volumen y tonelaje

La secuencia de pasos lógicos seguida en el algoritmo desarrollado para el cálculo del volumen y tonelaje del material dentro de un dominio geométrico en modelos de bloques, se muestran en el pseudocódigo del Algoritmo (1).

Algoritmo 1 Algoritmo para el cálculo del volumen y el tonelaje del material contenido en dominio geométrico en un modelo de bloques

```

1: function VOLUMENTONELAJESEGMENTOS( $M, p, R, n, c$ )
2:    $S \leftarrow$  INDEXARTRIÁNGULOS( $R, p$ )
3:    $L \leftarrow$  CREARSEGMENTOS( $n, p$ )
4:   RECORTARSEGMENTOS( $L, S, c, p$ )
5:   for all  $b \in M$  do
6:      $i \leftarrow$  LOCALIZACIÓNI( $b$ )
7:      $j \leftarrow$  LOCALIZACIÓNJ( $b$ )
8:      $c_v \leftarrow$  COEFICIENTEVOLUMEN( $b, L[i][j], n$ )
9:      $v \leftarrow c_v *$  VOLUMENGEOMÉTRICO( $b$ )
10:     $t \leftarrow v *$  DENSIDAD( $b$ )
11:    ACTUALIZARATRIBUTOS( $b, c_v, v, t$ )
12:   end for
13: end function

```

Este algoritmo tiene como parámetros de entrada a:

- $M = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, que representa al conjunto de los bloques del modelo, donde cada bloque $b = \{(i, j, k, l), (x_c, y_c, z_c), (e_i \times e_j \times e_k), \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$ contiene a la localización espacial, las coordenadas del centro, las extensiones y el conjunto de atributos geotécnicos.
- $p = \{(x_0, y_0, z_0), (nb_i \times nb_j \times nb_k), (lb_i \times lb_j \times lb_k), nr_0\}$, representa a las propiedades del modelo de bloques, la cual contiene a las coordenadas del origen, las dimensiones del modelo, las dimensiones de los bloques y al nivel de resolución.
- $R = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, representa al conjunto de los triángulos de la restricción geométrica, donde cada triángulo $t = \{(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$ contiene las coordenadas de sus vértices.
- n es un número entero positivo que representa a la cantidad de subdivisiones por cada lado de la base del bloque.
- $c = \{0, 1, 2, 3\}$, representa a los tipos de restricciones geométricas que utiliza el algoritmo, teniendo en cuenta que:
 - si $c = 0$, se calcula el volumen y el tonelaje de los bloques que estén por debajo de una superficie abierta.
 - si $c = 1$, se calcula el volumen y el tonelaje de los bloques que estén por encima de una superficie abierta.
 - si $c = 2$, se calcula el volumen y el tonelaje de los bloques que estén comprendidos entre dos superficies abiertas.
 - si $c = 3$, se calcula el volumen y el tonelaje de los bloques que estén dentro de una superficie cerrada.

2.3.1. Indexación de los triángulos de la restricción geométrica

La primera operación que se realiza en el algoritmo desarrollado es la indexación de los triángulos de la restricción geométrica a partir de las columnas del modelo de bloques. En esta operación se crea un arreglo bidimensional con dimensiones $(nb_i \times nb_j)$ y por cada posición (i, j) del arreglo se

guarda una lista con los triángulos pertenecientes a la columna. Esta operación se realiza con el objetivo de optimizar el algoritmo, evitando la realización de búsquedas innecesarias.

Los pasos seguidos en la operación de indexación se muestran en el pseudocódigo del Algoritmo (2), al cual se le pasa como parámetros, el conjunto de los triángulos de la restricción geométrica R y las propiedades del modelo de bloques p .

Algoritmo 2 Algoritmo de indexación de los triángulos de la restricción geométrica.

```

1: function INDEXARTRIÁNGULOS( $R, p$ )
2:    $S \leftarrow$  CREAMARREGLO( $p$ )
3:   for all  $t \in R$  do
4:      $l \leftarrow$  RANGODEÍNDICESIJK( $t, p$ )
5:     if ESUNRANGOVÁLIDO( $l$ ) = true then
6:       for  $i \leftarrow$  MINI( $l$ ) to MAXI( $l$ ) do
7:         for  $j \leftarrow$  MINJ( $l$ ) to MAXJ( $l$ ) do
8:            $S[i][j] \rightarrow$  ADICIONAR( $t$ )
9:         end for
10:      end for
11:    end if
12:  end for
13:  return  $S$ 
14: end function

```

Para determinar las columnas en las cuales se encuentran los triángulos de la restricción geométrica, se obtiene el rango ortogonal de índices que ocupa el triángulo con respecto al modelo de bloques. En esta operación, se transforman las coordenadas de los vértices de los triángulos, al espacio de coordenada de los índices del modelo. Las coordenadas transformadas (x_i, y_j, z_k) se obtiene mediante la ecuación (2.1), teniendo en cuenta el origen (x_0, y_0, z_0) y las dimensiones $(nb_i \times nb_j \times nb_k)$ del modelo.

$$\begin{aligned}
 x_i &= (x - x_0)/nb_i \\
 y_j &= (y - y_0)/nb_j \\
 z_k &= (z - z_0)/nb_k
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Primeramente se obtienen las localizaciones espaciales (i, j, k) de cada vértice de los triángulos,

redondeando por defecto las coordenadas transformadas, donde $i = \text{floor}(x_i)$, $j = \text{floor}(y_j)$ y $k = \text{floor}(z_k)$. Después se verifica que las localizaciones espaciales obtenidas estén dentro del rango de índices del modelo de bloques, cumpliéndose que $(0 \leq i \leq nb_i)$, $(0 \leq j \leq nb_j)$ y $(0 \leq k \leq nb_k)$. Por último se obtiene el rango ortogonal de índices, compuesto por las localizaciones espaciales mínima y máxima de los vértices del triángulo, como se muestra en la Figura (2.3).

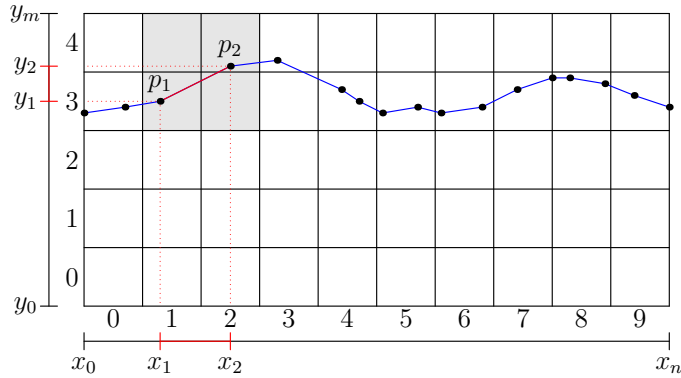


Figura 2.3: Representación bidimensional de un rango ortogonal de índices, donde cada segmento de línea representa un triángulo de la restricción geométrica.

2.3.2. Creación de los segmentos de líneas

En el algoritmo desarrollado los segmentos de líneas son creados en el procedimiento CREARSEGMENTOS, cuyo pseudocódigo se muestra en el Algoritmo (3). Este procedimiento recibe como parámetros, el número de subdivisiones por cada lado de la base del bloque n y las propiedades del modelo p .

Los segmentos de líneas son creados inicialmente con un largo igual a la altura del modelo de bloques ($\text{largo} = nb_k \times lb_k$) y perpendiculares a la base del modelo. Estos son agrupados por columnas, según su localización espacial (i, j) . Los segmentos de líneas son almacenados en un arreglo bidimensional con dimensiones $(nb_i \times nb_j)$ y por cada posición (i, j) del arreglo se crea una lista con los segmentos de líneas pertenecientes a esa columna. Esta operación se realiza en el procedimiento CREARLISTASEGMENTOS, cuyo pseudocódigo se muestra en el Algoritmo (4).

En la creación de los segmentos de líneas se debe tener en cuenta el patrón a utilizar en la ubicación de los segmentos de líneas dentro del bloque, ya que este influye de manera directa en los resultados del cálculo del coeficiente de volumen. En la presente investigación se analizaron

Algoritmo 3 Algoritmo para crear los segmentos de líneas agrupados por las columnas del modelo de bloques.

```

1: function CREARSEGMENTOS( $n, p$ )
2:    $L \leftarrow$  CREARARREGLO( $p$ )
3:   for  $i \leftarrow 0$  to CANTIDADDEBLOQUESENI( $p$ ) do
4:     for  $j \leftarrow 0$  to CANTIDADDEBLOQUESENJ( $p$ ) do
5:        $L_0 \leftarrow$  CREARLISTASEGMENTOS( $n, p, i, j$ )
6:        $L[i][j] \rightarrow$  ADICIONAR( $L_0$ )
7:     end for
8:   end for
9:   return  $L$ 
10: end function

```

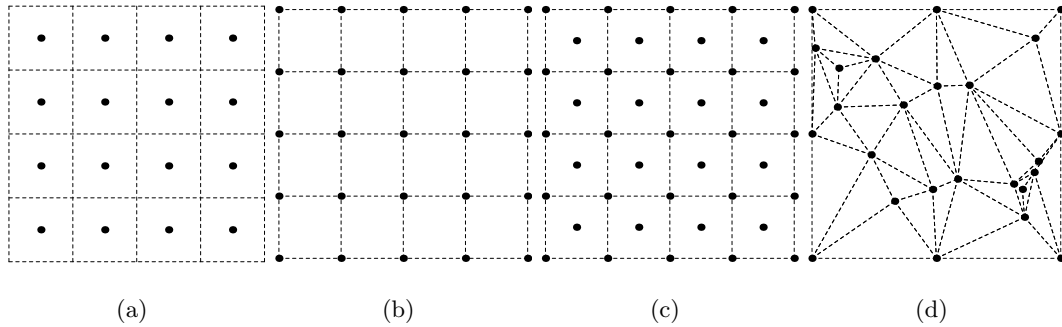


Figura 2.4: Patrones analizados para ubicar los segmentos de líneas dentro de un bloque.

varios patrones, los cuales se muestran en la Figura (2.4), en la cual los puntos dentro del cuadrado representan la ubicación de los segmentos de líneas en la base del bloque.

El primer patrón que se muestra en la Figura (2.4) se corresponde a la regla de integración numérica del punto medio y es el patrón usado por defecto en el algoritmo para la creación de los segmentos de líneas. El segundo se corresponde a la regla de integración numérica trapezoidal. El tercer método es la combinación de los dos primeros y el último método se corresponde a la ubicación de los segmentos de líneas a partir de los vértices de los triángulos del dominio geométrico. En los tres primeros patrones, la base del bloque se divide uniformemente en rectángulos y los segmentos de líneas pueden ser ubicados en el centro y en las esquinas de cada uno de estos rectángulos.

Algoritmo 4 Algoritmo para crear una lista de segmentos líneas en una columna del modelo.

```

1: function CREARLISTASEGMENTOS( $n, p, x, y$ )
2:    $L_0 \leftarrow \emptyset$ 
3:    $O \leftarrow \text{ORIGEN}(p)$ 
4:    $\Delta x \leftarrow \text{DIMESIÓNBLOQUEI}(p)/(n)$ 
5:    $\Delta y \leftarrow \text{DIMESIÓNBLOQUEJ}(p)/(n)$ 
6:    $O_x \leftarrow O_x + \Delta x/2$ 
7:    $O_y \leftarrow O_y + \Delta y/2$ 
8:   for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do
9:     for  $j \leftarrow 0$  to  $n$  do
10:        $x \leftarrow O_x + i * \Delta x$ 
11:        $y \leftarrow O_y + i * \Delta y$ 
12:        $z_0 \leftarrow O_z$ 
13:        $z_1 \leftarrow O_z + \text{DIMESIÓNBLOQUEK}(p) * \text{CANTIDADDEBLOQUESENK}(p)$ 
14:        $L_0 \rightarrow \text{ADICIONARSEGMENTO}(x, y, z_0, x, y, z_1)$ 
15:     end for
16:   end for
17:   return  $L_0$ 
18: end function

```

2.3.3. Recorte y ajuste de los segmentos de líneas

Después de creados los segmentos de líneas, estos se reajustan a los límites de la restricción geométrica establecida, como se muestra en la Figura (2.5). Esta operación se lleva a cabo en el procedimiento RECORTARSEGMENTOS, el cual tiene como parámetros el conjunto de los segmentos creados L , el conjunto de los triángulos de la restricción geométrica S , los tipos de escenarios c y las propiedades del modelo p .

En el procedimiento RECORTARSEGMENTOS se obtienen primeramente, los segmentos de líneas y los triángulos de la restricción geométrica contenidos en cada columna (i, j) del modelo de bloques. Seguidamente se calculan los puntos de intersección de cada segmento de línea con los triángulos de la restricción geométrica. Para calcular estos puntos, se deben tener en cuentas algunos principios matemáticos que se explicarán a continuación.

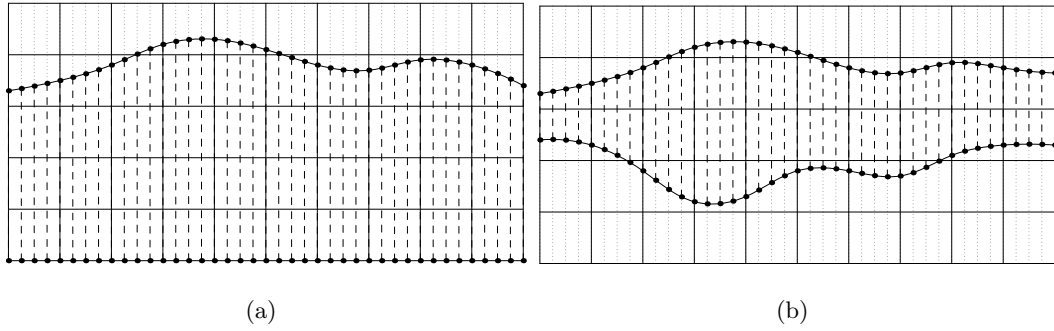


Figura 2.5: Representación bidimensional del ajuste de los segmentos de líneas dado una restricción geométrica.

Algoritmo 5 Algoritmo para recortar los segmentos de líneas dado una restricción geométrica.

```

1: function RECORTARSEGMENTOS( $L, S, c, p$ )
2:   for  $i \leftarrow 0$  to CANTIDADDEBLOQUESENI( $p$ ) do
3:     for  $j \leftarrow 0$  to CANTIDADDEBLOQUESENJ( $p$ ) do
4:        $li \leftarrow \emptyset$ 
5:        $ln \leftarrow \emptyset$ 
6:       for all  $l \in L[i][j]$  do
7:         for all  $t \in S[i][j]$  do
8:           if EXISTEINTERSECCIÓN( $t, l$ ) = true then
9:              $li \rightarrow$  ADICIONAR(INTERSECCIÓN( $t, l$ ))
10:          end if
11:         end for
12:         if  $li \neq \emptyset$  then
13:           ORDENAR( $li$ )
14:            $ln \leftarrow$  ADICIONAR(AJUSTARINTERVALO( $l, li, c$ ))
15:         end if
16:       end for
17:        $L[i][j] \leftarrow ln$ 
18:     end for
19:   end for
20: end function

```

Los segmentos de líneas se pueden expresar vectorialmente de forma similar a la ecuación paramétrica de una recta en el espacio tridimensional. Un segmento de línea se puede considerar como una porción finita de una recta acotada entre dos puntos diferentes en el espacio. El mismo se expresa de forma vectorial en la ecuación (2.2), en la cual \vec{p}_1 y \vec{p}_2 representan al vector posición de los puntos iniciales y finales del segmento, \vec{d} es un vector unitario que representa a la dirección y t es un valor escalar que representa a la distancia existente entre los puntos p_1 y p_2 .

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{d}t \quad (2.2)$$

El punto de intersección entre un segmento de línea y un triángulo se puede determinar aplicando el mismo principio matemático utilizado para determinar el punto de intersección entre una recta y un plano, en el cual se igualan las ecuaciones paramétricas del plano y de la recta como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} (\vec{p}_1 + \vec{d}t) \cdot \vec{n} &= d \\ t &= \frac{d - \vec{p}_1 \cdot \vec{n}}{\vec{d} \cdot \vec{n}} \end{aligned}$$

Primeramente se debe verificar que el segmento de línea no sea paralelo al plano formado por el triángulo, por lo cual se debe cumplir que $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$. Cuando se cumpla esta condición, el punto de intersección estará situado a una distancia t del punto del p_1 del segmento de línea y por último se debe chequear si el punto intersectado está contenido dentro del triángulo. En la presente investigación el punto de intersección entre un segmento de línea y un triángulo se calcula utilizando el algoritmo propuesto por [Badouel, 1990].

En el procedimiento RECORTARSEGMENTOS, por cada segmento de línea, se crea una lista para almacenar los parámetros t , obtenidos a partir de las intersecciones existentes entre el segmento y los triángulos de la restricción geométrica. La lista no contendrá parámetros t repetidos y los mismos se ordenarán ascendentemente. Los segmentos de líneas $l = [p_1, p_2]$, son ajustados en dependencia del escenario establecido para la restricción geométrica. Esta operación se realiza en el procedimiento AJUSTARINTERVALO, cuyo pseudocódigo se muestra en el Algoritmo (6).

En el primer escenario de la restricción geométrica, solo debería existir un punto de intersección entre el segmento de línea y la restricción geométrica, ubicado en t_1 , lo cual ofrece dos vías para ajustar el segmento. En el caso $c = 0$, el segmento de línea ajustado l , quedaría de la siguiente forma $l = [p_1, p(t_1)]$ y para el caso $c = 1$ quedaría $l = [p(t_1), p_2]$.

Algoritmo 6 Algoritmo para ajustar un segmento de línea según el escenario de la restricción geométrica establecido.

```

1: function AJUSTARINTERVALO( $l, li, c$ )
2:    $ln \leftarrow l$ 
3:   if  $c = 0$  then
4:      $ln[1] \leftarrow \text{EVALUARPOSICIÓN}(l, li[0])$ 
5:   else if  $c = 1$  then
6:      $ln[0] \leftarrow \text{EVALUARPOSICIÓN}(l, li[0])$ 
7:   else if  $c = 2$  or  $c = 3$  then
8:      $i \leftarrow 0$ 
9:     while  $i < \text{CANTIDADELEMENTOS}(li)$  do
10:       $ln[0] \leftarrow \text{EVALUARPOSICIÓN}(l, li[i])$ 
11:       $ln[0] \leftarrow \text{EVALUARPOSICIÓN}(l, li[i + 1])$ 
12:       $i = i + 2$ 
13:     end while
14:   end if
15:   return  $ln$ 
16: end function

```

En el caso $c = 2$, que representa al segundo escenario de la restricción geométrica, existen dos puntos de intersección ubicados en las posiciones t_1 y t_2 . En este escenario se reajusta el segmento de línea de forma tal que $l = [p(t_1), p(t_2)]$, lo cual representa al segmento de línea comprendido entre dos superficies abiertas.

En el caso $c = 3$, que representa al tercer escenario de la restricción geométrica, se reajusta el segmento comprendido dentro de la superficie cerrada. Si la superficie cerrada es convexa entonces sucederá parecido al caso $c = 2$ y el segmento reajustado quedaría $l = [p(t_1), p(t_2)]$. Si la superficie cerrada no fuera convexa, se obtendrían en algunos casos, varios intervalos de segmentos reajustados a partir de un mismo segmento. Este tipo de superficie resulta ser más compleja de tratar porque puede provocar resultados indeseados en algunas ocasiones.

2.3.4. Cálculo del volumen y el tonelaje del material contenido en un bloque

Para calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques del modelo, se tiene en cuenta el coeficiente de volumen c_v , el cual es la razón existente entre el volumen del material contenido en el bloque V_m y el volumen geométrico del bloque V_t , como se muestra en la ecuación (2.3).

$$c_v = \frac{V_m}{V_t} \tag{2.3}$$

En el algoritmo desarrollado se calcula un coeficiente de volumen aproximado c_v^* , a partir del porcentaje de ocupación de los segmentos de líneas dentro de los bloques del modelo, como se muestra en la Figura (2.6).

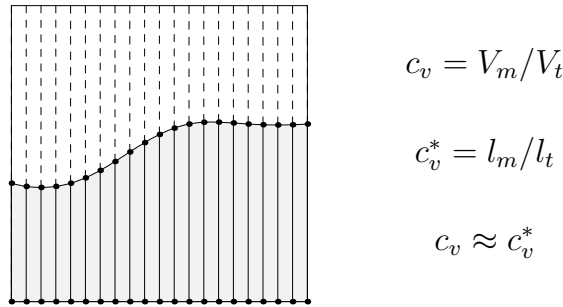


Figura 2.6: Sección transversal de un bloque donde se muestran los segmentos de líneas utilizados para obtener el coeficiente de volumen aproximado del material contenido.

El coeficiente de volumen aproximado c_v^* , se obtiene mediante la ecuación (2.4), en la cual s^2 es la cantidad máxima de segmentos de líneas dentro del bloque, l es la altura del bloque, l_i es la longitud de cada segmento de línea y N es la cantidad real de segmentos de líneas dentro del bloque.

$$c_v^* = \frac{1}{s^2 * l} * \sum_{i=1}^N l_i \tag{2.4}$$

En el algoritmo desarrollado, el c_v^* se calcula en el procedimiento COEFICIENTEVOLUMEN, cuyo pseudocódigo se muestra en el Algoritmo (7). En el procedimiento COEFICIENTEVOLUMEN se reajustan primeramente, los segmentos de líneas con respecto a los límites geométricos del bloque. Después se obtiene la distancia total de los segmentos contenidos en el bloque y por último se calcula el $c_v^* = ds/dt$.

Algoritmo 7 Algoritmo para el cálculo del coeficiente de volumen aproximado en cada bloque

```

1: function COEFICIENTEVOLUMEN( $b, L, n$ )
2:    $c_v \leftarrow 0$ 
3:    $ds \leftarrow 0$ 
4:   for all  $l \in L$  do
5:      $p_i \leftarrow l[0]$ 
6:      $p_s \leftarrow l[1]$ 
7:     if ESTÁCONTENIDO( $l[0], b$ ) = false then
8:        $p_i \leftarrow$  INTERSECCIÓN(CARAINFERIOR( $b$ ),  $l$ )
9:     else if ESTÁCONTENIDO( $l[1], b$ ) = false then
10:       $p_s \leftarrow$  INTERSECCIÓN(CARASUPERIOR( $b$ ),  $l$ )
11:     else if  $p_s \neq \emptyset$  and  $p_i \neq \emptyset$  then
12:        $ds \leftarrow ds +$  DISTANCIA( $p_s, p_i$ )
13:     end if
14:   end for
15:    $dt \leftarrow n^2 *$  ALTURA( $b$ )
16:    $c_v \leftarrow ds/dt$ 
17:   return  $c_v$ 
18: end function

```

El último paso del algoritmo desarrollado, consiste en calcular el volumen y el tonelaje del material contenido en cada bloque. A partir del c_v^* calculado en el procedimiento COEFICIENTEVOLUMEN, se calcula el volumen del material contenido en el bloque multiplicando c_v^* por el volumen geométrico del bloque. El tonelaje del bloque se obtiene multiplicando el volumen del material contenido en el bloque por la densidad promedio de la roca. Finalmente se registran los valores del volumen y el tonelaje calculado, en atributos de los bloques del modelo.

2.4. Conclusiones parciales

El algoritmo desarrollado fue diseñado para calcular el volumen y tonelaje del material existente dentro de un dominio geométrico, teniendo en cuenta tres posibles escenarios de restricciones geométricas, lo cual aumenta su nivel de usabilidad. El volumen de datos generado por un modelo

de bloques, puede disminuir el rendimiento computacional de un sistema informático minero, por tal motivo en el algoritmo desarrollado se utilizaron buenas prácticas que permiten mejorar el rendimiento computacional. Algunas de estas buenas prácticas consisten en el uso de una estructura de datos espaciales lineal, la indexación de los triángulos de la restricción geométrica y el uso del método de los segmentos de líneas para el cálculo del volumen parcial en los bloques fronteras.

CAPÍTULO 3

Análisis de resultados

En el presente capítulo se realiza un análisis de los principales resultados obtenidos en las pruebas realizadas al algoritmo desarrollado. Primeramente se analiza la efectividad del método de cálculo empleado para determinar el volumen del material contenido en un bloque. Después se exponen los resultados de las pruebas realizadas en el cálculo del volumen y el tonelaje en un modelo de bloques perteneciente a un yacimiento laterítico cubano. Por último se analiza la complejidad y el rendimiento del algoritmo desarrollado.

El algoritmo desarrollado fue implementado en el lenguaje de programación C/C++ y se emplearon las bibliotecas de clases *Visualization Toolkit* (VTK) [Schrodeder et al., 1996], para utilización de algoritmos de Geometría Computacional y para la visualización tridimensional. Las pruebas que se describen en el presente capítulo, se realizaron en una computadora con un microprocesador Intel Core i3 a 1.66 GHz, una memoria RAM de 2 GB y como sistema operativo la distribución de GNU/Linux Kubuntu 13.10.

3.1. Efectividad del método de cálculo del volumen parcial

Las superficies utilizadas como restricciones geométricas para el cálculo del tonelaje en modelos de bloques se forman a partir de fenómenos naturales y por lo general no describen ningún patrón que permita modelarlas mediante funciones matemáticas. Esta característica presentada dificulta la obtención de error relativo generado en el cálculo del volumen aproximado, por tal motivo, en

la prueba que se describe a continuación se utilizaron superficies modeladas a partir de funciones matemáticas.

Para obtener la efectividad del método de cálculo del volumen utilizado en el algoritmo desarrollado, se realizó una prueba en la cual se compara un volumen real con un volumen aproximado calculado por el algoritmo desarrollado. La efectividad se calcula utilizando la ecuación (3.1), en la cual n_e es el nivel de efectividad expresado en % y e_{pc} es el error relativo porcentual obtenido mediante la ecuación (3.2). El e_{pc} se calcula teniendo en cuenta el error relativo generado en el cálculo del coeficiente de volumen aproximado c_v^* . En la ecuación (3.2) c_v representa al coeficiente de volumen real y c_v^* representa al coeficiente de volumen aproximado, calculado utilizando el método de los segmentos de líneas.

$$n_e = 100 - e_{pc} \quad (3.1)$$

$$e_{pc} = \frac{c_v - c_v^*}{c_v} * 100 \quad (3.2)$$

En la prueba realizada se utilizó un bloque de dimensiones $5 \times 5 \times 5$ unidades y 10 restricciones geométricas basadas en funciones matemáticas. El bloque utilizado se encuentra centrado en el origen del eje de coordenadas y tiene un volumen de 125 unidades cúbicas. Las superficies utilizadas se encuentran acotadas en los intervalos $x \in [-2,5; 2,5]$, $y \in [-2,5; 2,5]$ y $z \in [-2,5; 2,5]$, como se muestra en la Figura (3.1).

El objetivo de esta prueba consiste en determinar la efectividad del método de cálculo de volumen utilizado en el algoritmo desarrollado, a partir del error relativo existente entre el volumen real comprendido entre cada superficie y la base del cubo y el volumen aproximado calculado por el algoritmo. En la Tabla (3.1) se muestran las ecuaciones de las superficies utilizadas en esta prueba y el volumen existente entre las superficies y la base del cubo y el coeficiente de volumen real.

Para calcular el volumen aproximado se ubicaron los segmentos de líneas siguiendo el patrón de integración del punto medio. Por cada superficie se calculó el coeficiente de volumen aproximado, el error relativo y la efectividad, utilizando desde 4 hasta 121 segmentos de líneas por bloque. Los resultados obtenidos en esta prueba, referentes al cálculo del coeficiente de volumen aproximado por cada superficie y la efectividad mostrada por el algoritmo en cada uno de estos casos, se muestran en las Tablas (3.2) y (3.3).

Como se puede apreciar en la gráfica de la Figura (3.2), existe una mayor estabilidad en la

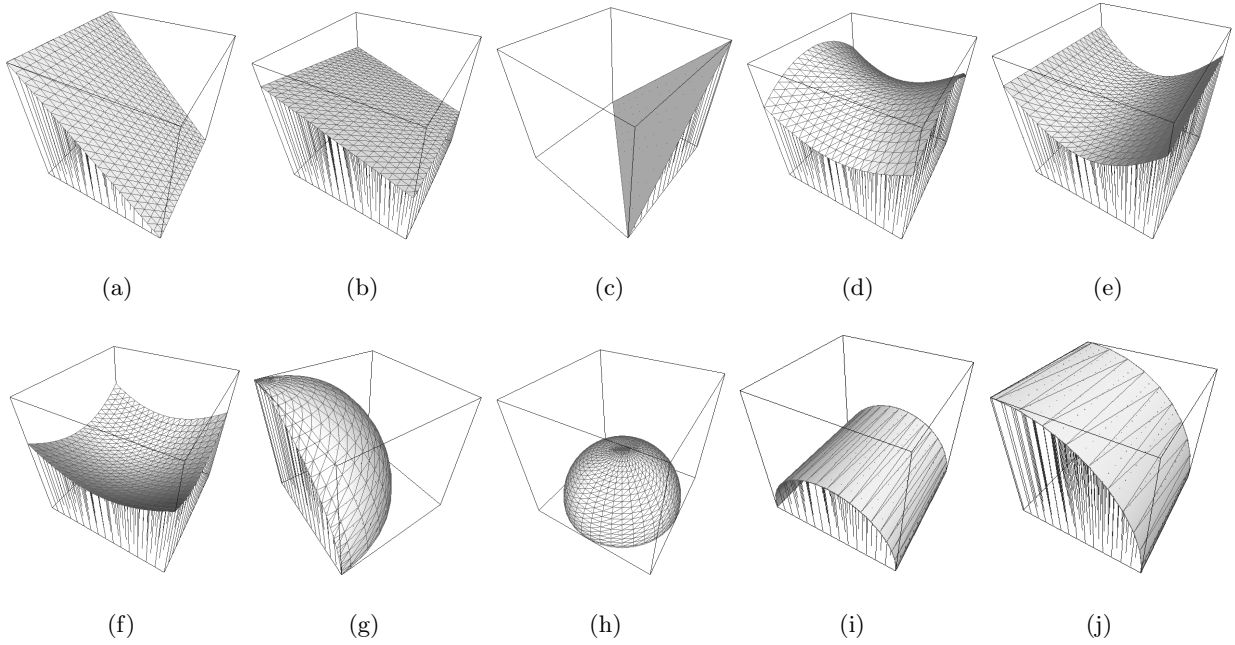


Figura 3.1: Superficies matemáticas utilizadas para el cálculo del coeficiente de volumen dentro de un bloque utilizando segmentos de líneas.

Tabla 3.1: Resultados del cálculo del volumen entre las superficies matemáticas y la base del bloque.

Figura	ID	Función	V_m	$V_{cubo} - V_m$	c_v
a)	S1	$z = x$	72,5	72,5	0,5
b)	S2	$z = \frac{7}{20}x + \frac{3}{20}y + \frac{1}{2}$	75	50	0,6
c)	S3	$z = -2,5 - x - y$	20,83333	104,16667	0,16666
d)	S4	$z = \frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{4}y^2 + 1$	87,5	37,5	0,7
e)	S5	$z = \frac{1}{4}x^2$	75,52083	49,91666	0,6041666666
f)	S6	$z = \frac{3}{20}x^2 + \frac{3}{20}y^2 - 1$	53,125	71,875	0,425
g)	S7	$z = \sqrt{25 - (x - 2,5)^2 - (y - 2,5)^2} - 2,5$	65,44984	59,55016	0,5235987756
h)	S8	$z = \sqrt{6,25 - x^2 - y^2} - 2,5$	32,72492	92,27508	0,2617993878
i)	S9	$z = \sqrt{6,25 - x^2} - 2,5$	49,08739	75,91261	0,3926990817
j)	S10	$z = \sqrt{25 - (x - 2,5)^2} - 2,5$	98,17477	26,82523	0,78539816

efectividad del método cálculo del volumen a partir de la utilización de 81 segmentos de líneas por bloque. En esta prueba también se puede apreciar una efectividad media superior al 99% a partir

de la utilización de 49 segmentos de líneas por bloques.

Tabla 3.2: Resultados del cálculo del coeficiente de volumen aproximado por cada superficie.

SID	Segmentos de líneas por bloque									
	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
S1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
S2	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000
S3	0,1250	0,1482	0,1563	0,1600	0,1620	0,1633	0,1641	0,1646	0,1650	0,1653
S4	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000	0,7000
S5	0,5781	0,5926	0,5977	0,6000	0,6013	0,6020	0,6025	0,6029	0,6031	0,6033
S6	0,3938	0,4111	0,4172	0,4200	0,4215	0,4224	0,4230	0,4235	0,4238	0,4240
S7	0,5400	0,5449	0,5372	0,5279	0,5261	0,5249	0,5277	0,5262	0,5248	0,5248
S8	0,3536	0,2953	0,2700	0,2788	0,2724	0,2630	0,2686	0,2658	0,2640	0,2648
S9	0,4330	0,4151	0,4074	0,4033	0,4008	0,3991	0,3980	0,3971	0,3965	0,3960
S10	0,8148	0,8016	0,7960	0,7930	0,7911	0,7900	0,7892	0,7886	0,7881	0,7877

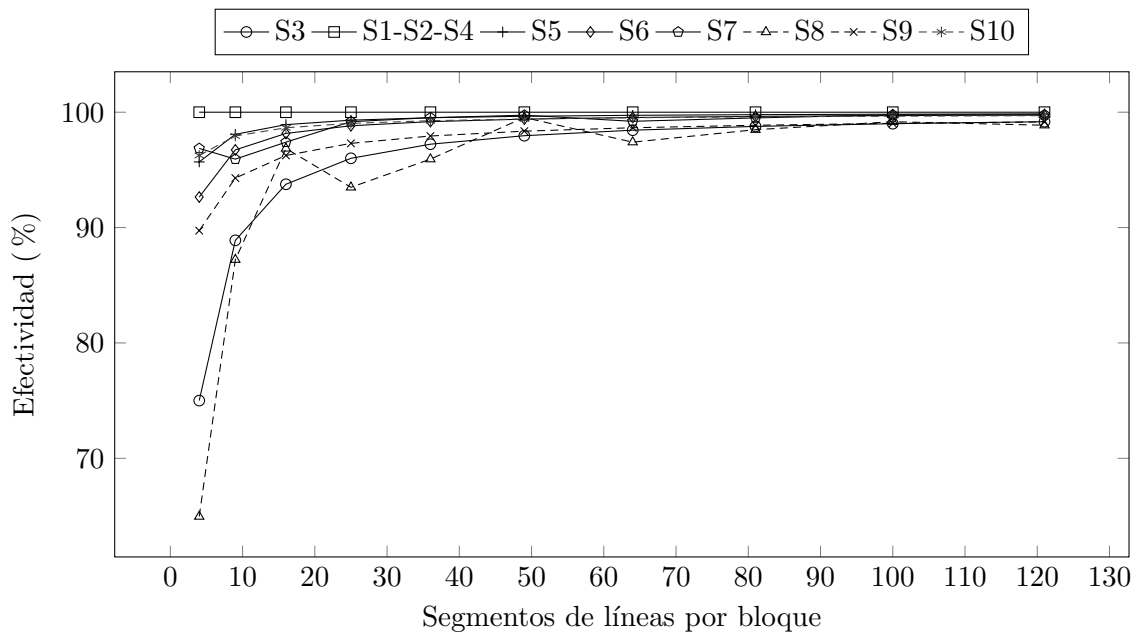


Figura 3.2: Gráfica comparativa de las curvas de efectividad por cada superficie utilizada.

Tabla 3.3: Valores de la efectividad del método de cálculo del volumen aproximado.

SID	Segmentos de líneas por bloque									
	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
S1	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
S2	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
S3	75,0 %	88,9 %	93,8 %	96,0 %	97,2 %	98,0 %	98,4 %	98,8 %	99,0 %	99,2 %
S4	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
S5	95,7 %	98,1 %	98,9 %	99,3 %	99,5 %	99,6 %	99,7 %	99,8 %	99,8 %	99,9 %
S6	92,6 %	96,7 %	98,2 %	98,8 %	99,2 %	99,4 %	99,5 %	99,6 %	99,7 %	99,8 %
S7	96,9 %	95,9 %	97,4 %	99,2 %	99,5 %	99,7 %	99,2 %	99,5 %	99,8 %	99,8 %
S8	65,0 %	87,2 %	96,9 %	93,5 %	95,9 %	99,5 %	97,4 %	98,5 %	99,2 %	98,9 %
S9	89,7 %	94,3 %	96,3 %	97,3 %	97,9 %	98,4 %	98,7 %	98,9 %	99,0 %	99,1 %
S10	96,3 %	97,9 %	98,7 %	99,0 %	99,3 %	99,4 %	99,5 %	99,6 %	99,7 %	99,7 %
\bar{n}_e	91,1 %	95,9 %	98,0 %	98,3 %	98,6 %	99,4 %	99,2 %	99,5 %	99,6 %	99,6 %

3.2. Resultados de cálculo de tonelaje en un caso de estudio

El algoritmo desarrollado fue probado en un entorno real, en el cual se calculó el volumen y el tonelaje del material contenido dentro de un dominio geométrico en un yacimiento mineral. En esta prueba, los resultados del volumen y el tonelaje obtenidos se compararon con los resultados arrojados por un software profesional.

3.2.1. Caso de estudio: modelo de bloques de la región O48

Como caso de estudio se utilizó el modelo de bloques de la región O48 de un yacimiento laterítico cubano. Este modelo de bloques tiene unas dimensiones de $16 \times 16 \times 22$ bloques y cada bloque tiene unas dimensiones de $16,66 \times 16,66 \times 3$ metros.

En el caso de estudio se calculó el volumen y el tonelaje del elemento hierro (Fe), contenido en varios dominios geométricos, empleando 25 segmentos de líneas por bloque. Los dominios geométricos utilizados, representan a los tres escenarios de restricciones geométricas establecidos para el

algoritmo. El resultado visual de los cálculos realizados en el caso de estudio, se puede constatar en las Figuras (3.4), (3.5), (3.6). En estas figuras se muestran de izquierda a derecha:

- (a) La restricción geométrica y el modelo de bloques antes de realizarse las operaciones de cálculo.
- (b) Los segmentos de líneas generados en las operaciones de cálculo.
- (c) Los bloques dentro del dominio geométrico, a los cuales se le calcularon el volumen y el tonelaje del material contenido. A cada bloque se le aplicó una leyenda de colores, ver Figura (3.3), en dependencia del porcentaje del volumen del material contenido.

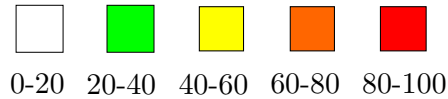


Figura 3.3: *Leyenda de colores aplicada a los bloques del modelo después de calculado el volumen del material contenido.*

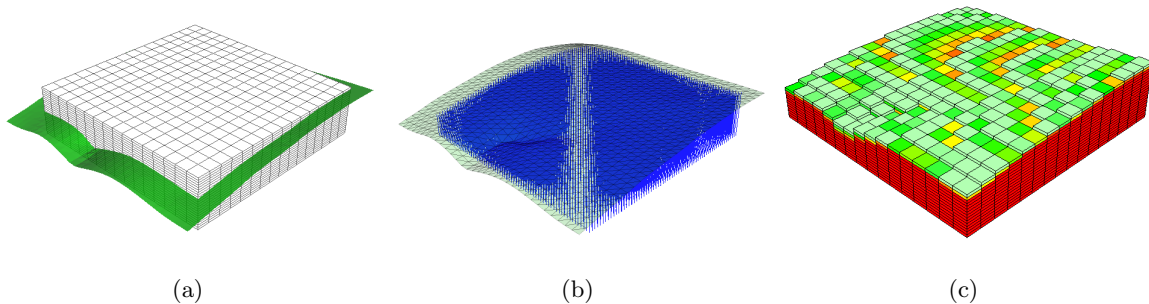


Figura 3.4: *Resultados del cálculo del volumen del material contenido en los bloques bajo la superficie del terreno en el modelo de bloques de la región O48.*

La Figura (3.4) se corresponde al primer escenario de restricción geométrica, en el cual se calculó el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques que están debajo de la superficie. La Figura (3.5) se corresponde al segundo escenario de restricción geométrica, en el cual se calculó el volumen y el tonelaje del material contenido en bloques comprendidos entre dos superficies de abiertas. La Figura (3.6) se corresponde al tercer escenario de restricción geométrica, en el cual se calculó el volumen y el tonelaje del material contenido en los bloques dentro de un dominio geométrico cerrado.

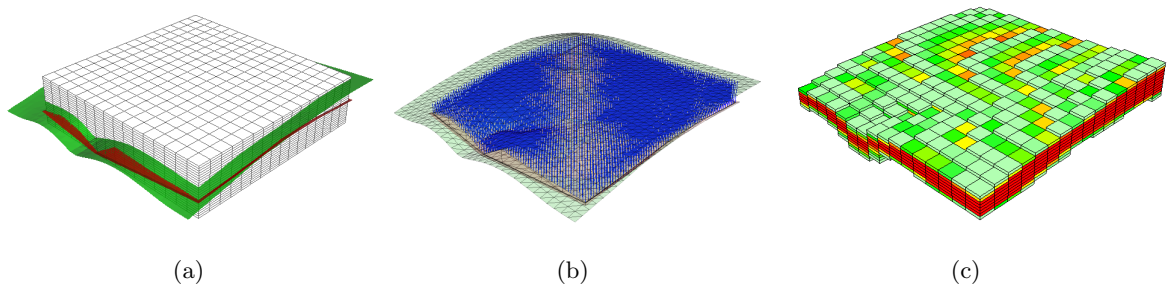


Figura 3.5: Resultados del cálculo del volumen del material contenido entre dos superficies abiertas en el modelo de bloques de la región O48.

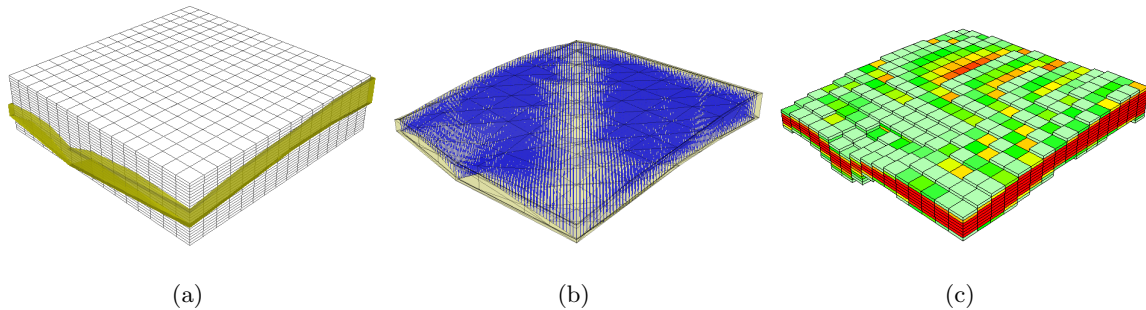


Figura 3.6: Resultados del cálculo del volumen del material contenido dentro de un dominio geométrico cerrado en el modelo de bloques de la región O48.

3.2.2. Comparación con un software profesional

Los resultados obtenidos anteriormente en el cálculo del volumen y el tonelaje dentro de dos superficies abiertas, fueron comparados con los resultados arrojados por el software profesional *Gemcom-Gems*¹ en su versión 6.0. El sistema *Gemcom-Gems* utiliza un método similar para calcular el volumen parcial del material contenido en los bloques, para esta ocasión se utilizó un nivel de integración de 5 a 25 segmentos de líneas por cada bloque.

Los resultados de los cálculos realizados en cada sección horizontal del modelo de bloques se muestran en la Tabla (3.4). En la misma se puede apreciar que los resultados obtenidos por el algoritmo desarrollado son inferiores con respecto a los resultados obtenidos por el sistema *Gemcom-Gems*. En ambos casos, los resultados del cálculo del volumen por cada sección del modelo de bloques, describen un patrón similar como se muestra en la gráfica de la Figura (3.7), lo cual da muestra de la confiabilidad del algoritmo desarrollado.

¹El sistema *Gemcom-Gems* es un software minero de prestigio internacional, actualmente es conocido como *Geovia-Gems*.

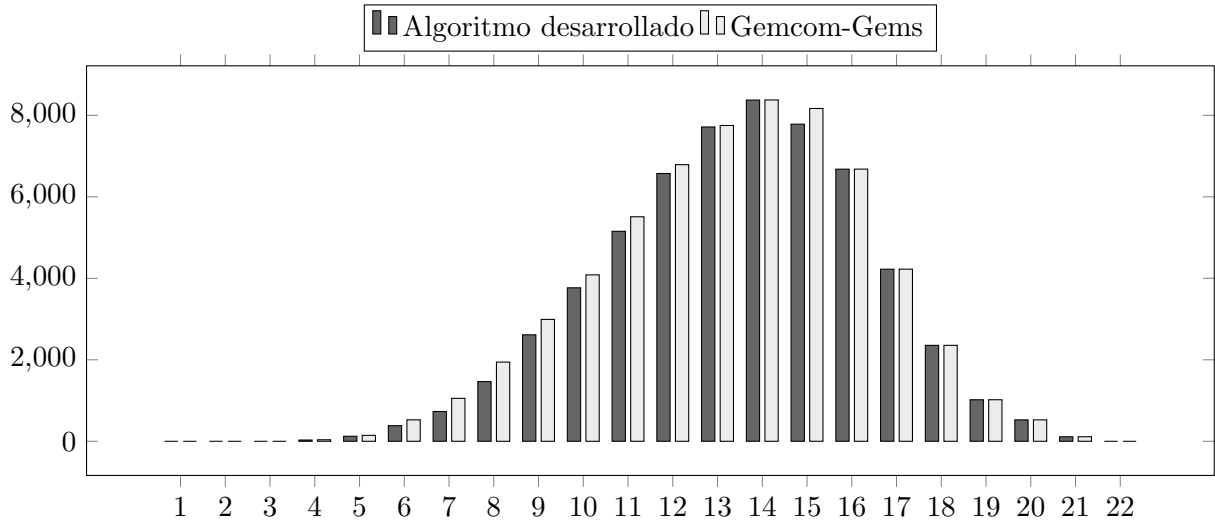


Figura 3.7: Gráfica de barras comparativa, con los resultados obtenidos en el cálculo del volumen por el algoritmo desarrollado y por el sistema Gemcom-Gems en cada sección horizontal del modelo de bloques.

La diferencia existente entre los resultados alcanzados por el algoritmo desarrollado y el sistema Gemcom-Gems, se debe fundamentalmente al patrón utilizado en la ubicación de los segmentos de líneas en la base del bloque. Estas diferencias se pueden apreciar en las secciones horizontales de la Figura (3.8).

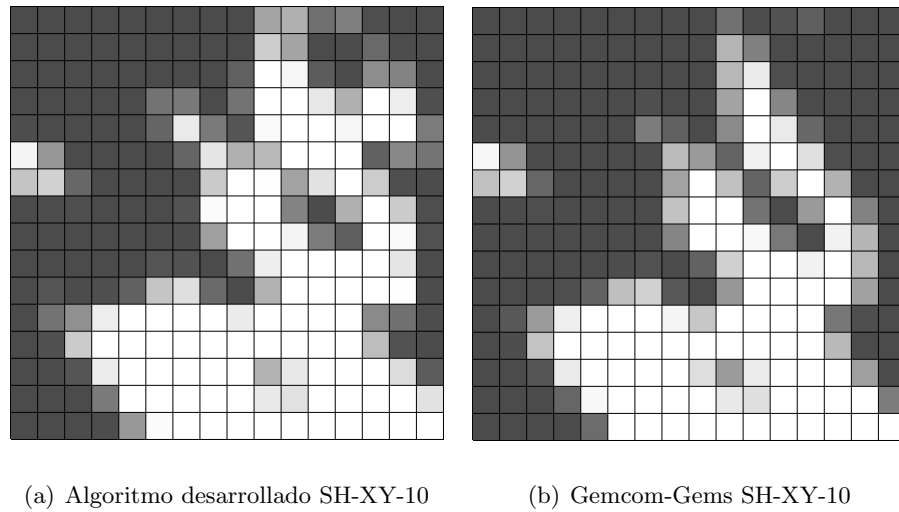


Figura 3.8: Comparación entre los volúmenes calculados por el algoritmo desarrollado y por el sistema Gemcom-Gems en dos secciones horizontales.

Tabla 3.4: Resultados del cálculo del volumen y el tonelaje de Fe en las secciones horizontales del modelo de bloques de la región O48

Secciones	Volumen de Fe ($10^3 * m^3$)		Tonelaje de Fe ($10^3 * T$)	
	Algoritmo desarrollado	Gemcom-Gems	Algoritmo desarrollado	Gemcom-Gems
SH-XY-1	0	0	0	0
SH-XY-2	0	0	0	0
SH-XY-3	0	0	0	0
SH-XY-4	31,4399	37,0803	33,0119	38,9343
SH-XY-5	123,507	146,019	128,876	151,953
SH-XY-6	382,965	526,560	386,508	530,256
SH-XY-7	730,732	1053,78	736,451	1050,9
SH-XY-8	1465,90	1944,21	1460,29	1921,5
SH-XY-9	2613,16	2991,59	2634,52	3000,75
SH-XY-10	3767,11	4084,92	3831,12	4138,9
SH-XY-11	5154,11	5510,3	5258,03	5603,16
SH-XY-12	6572,56	6789,68	6751,66	6961,54
SH-XY-13	7715,05	7751,82	8008,77	8044,72
SH-XY-14	8375,11	8378,03	8778,81	8781,87
SH-XY-15	7784,31	7783,85	8168,61	8168,14
SH-XY-16	6679,50	6680,95	7013,48	7014,99
SH-XY-17	4224,19	4225,12	4435,4	4436,37
SH-XY-18	2354,77	2355,26	2472,51	2473,03
SH-XY-19	1019,36	1019,81	1070,33	1070,8
SH-XY-20	525,497	526,144	551,772	552,451
SH-XY-21	110,800	111,039	116,34	116,591
SH-XY-22	0	0	0	0

3.3. Análisis de la complejidad del algoritmo

En las operaciones realizadas en el algoritmo desarrollado, se utilizan tres conjuntos fundamentales de elementos los cuales influyen de manera directa en la complejidad del algoritmo. Estos conjuntos son los bloques del modelo, los segmentos de líneas generados y los triángulos de la restricción geométrica.

Los modelos de bloques representan por lo general una matriz tridimensional de orden $i \times j \times k$. Denotando a n como el orden máximo de la matriz, se puede decir en términos de complejidad algorítmica que el recorrido de todos los bloques del modelo estará acotado en $O(n^3)$. El conjunto de los triángulos que representan a la restricción geométrica tendrá en el peor de los casos al menos p elementos por cada columna (i, j) del modelo de bloques, por tanto, el recorrido de todos los elementos de la restricción geométrica estará acotado en $O(p * n^2)$. El conjunto de los segmentos de líneas tendrá q segmentos por cada columna del modelo de bloques, en el peor de los casos el recorrido de este conjunto de elementos estará acotado en $O(q * n^2)$.

Durante el análisis de la complejidad del algoritmo desarrollado, el mismo se dividió en 4 bloques de códigos, los cuales representan a las operaciones de *Indexar triángulos*, *Crear segmentos*, *Recortar segmentos* y *Calcular volumen y tonelaje*. Las complejidades de estas operaciones se muestran en la Tabla (3.5).

Tabla 3.5: *Complejidades algorítmicas de las operaciones fundamentales realizadas en el algoritmo desarrollado.*

Operaciones	Complejidad	
	Algoritmo con indexación	Algoritmo sin indexación
Indexar triángulos	$O(p * n^2)$	—
Crear segmentos	$O(q * n^2)$	$O(q * n^2)$
Recortar segmentos	$O(p * q * n^2)$	$O(p * q * n^4)$
Calcular volumen y tonelaje	$O(q * n^3)$	$O(q * n^5)$

En la primera operación *Indexar triángulos*, se iterara el conjunto de triángulos con un costo computacional de $O(p * n^2)$ y el resto de las operaciones internas que se realizan en este bloque de código tienen una complejidad de $O(1)$. En la segunda operación *Crear Segmentos* se itera por cada

fila y columna del modelo con un costo de $O(n^2)$ y por columna se crea una lista de segmentos de líneas, lo cual tendrá un costo de $O(q)$. La operación *Crear Segmentos* tendrá una complejidad de $O(q * n^2)$.

En la operación *Recortar segmentos* se necesita determinar por cada segmento los posibles puntos de intersección con los triángulos de la restricción geométrica. Esta operación tendría normalmente una complejidad de $O(p * q * n^4)$, porque se necesitaría iterar el conjunto de segmentos de líneas y por cada segmento se debería iterar el conjunto de los triángulos de la restricción geométrica para determinar las posibles intersecciones. En el algoritmo desarrollado la operación *Recortar segmentos* tiene una complejidad de $O(p * q * n^2)$ ya que los segmentos y los triángulos están indexados por columnas y no es necesario recorrer completamente el conjunto de triángulos para determinar las intersecciones.

La operación *Calcular volumen y tonelaje* debería tener una complejidad $O(q * n^5)$ pero en el algoritmo desarrollado los segmentos se crean indexados por columnas del modelo, lo cual permite disminuir el costo computacional de esta operación a $O(q * n^3)$. Finalmente la complejidad del algoritmo desarrollado está acotada por $O(q * n^3)$.

3.4. Análisis del rendimiento del algoritmo

Durante el análisis del rendimiento del algoritmo desarrollado se midieron dos parámetros fundamentales, el tiempo de ejecución y el consumo de la memoria RAM. Para medir estos parámetros se realizaron varias corridas del algoritmo, calculando en 6 modelos de bloques diferentes, el volumen del material contenido bajo una superficie utilizando 100 segmentos de líneas por bloque. La superficie empleada tiene un total de 900 triángulos y ocupa un tamaño en memoria de 32400 bytes.

Las dimensiones de los modelos de bloques utilizados se muestran en la Tabla (3.6) y cada bloque tiene un tamaño en memoria de 184 bytes. Los resultados de esta prueba de rendimiento se pueden apreciar en la Tabla (3.7), en la cual se muestran los valores del tiempo de ejecución y del consumo de memoria RAM obtenidos en cada una de las corridas realizadas.

A partir de los valores obtenidos anteriormente se construyó la gráfica de la Figura (3.9), en la cual se muestra la relación existente entre el consumo de memoria y el tiempo de ejecución del algoritmo en la presente prueba. En esta gráfica se aprecia un aumento lineal del consumo de

Tabla 3.6: Dimensiones de los modelos de bloques en la prueba de rendimiento.

ID	Dimensiones del modelo	Dimensiones de los bloques	Memoria (KB)
MB-1	$10 \times 10 \times 5$	$10 \times 10 \times 10$	92
MB-2	$20 \times 20 \times 10$	$5 \times 5 \times 5$	736
MB-3	$40 \times 40 \times 20$	$2,5 \times 2,5 \times 2,5$	5888
MB-4	$60 \times 60 \times 30$	$1,66 \times 1,66 \times 1,66$	19872
MB-5	$80 \times 80 \times 40$	$1,25 \times 1,25 \times 1,25$	47104
MB-6	$100 \times 100 \times 50$	$1 \times 1 \times 1$	92000

la memoria RAM en dependencia de las dimensiones de los modelos de bloques utilizados. Otro aspecto interesante que se pudo obtener en esta prueba es que la superficie influye muy poco en el consumo de memoria del algoritmo, este consumo depende principalmente de las dimensiones del modelo de bloques y de la cantidad de segmentos de líneas utilizados para el cálculo del volumen y tonelaje.

Tabla 3.7: Resultados del consumo de memoria y el tiempo de ejecución.

Modelo de bloques	100 segmentos por bloque		
	Total de segmentos de líneas	Tiempo (s)	Memoria (KB)
MB-1	10000	1,021	240
MB-2	40000	3,030	960
MB-3	160000	16,303	3840
MB-4	360000	53,051	8640
MB-5	640000	123,040	15360
MB-6	1000000	239,084	24000

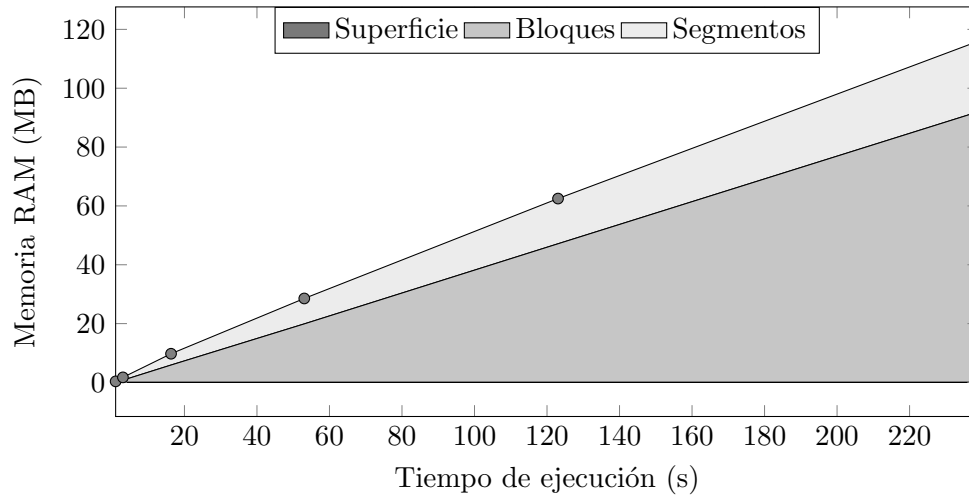


Figura 3.9: Gráficas de los resultados del consumo de memoria RAM y el tiempo de ejecución.

3.5. Conclusiones parciales

Las pruebas realizadas al algoritmo desarrollado para determinar la efectividad del método de cálculo de volumen empleado, mostraron que a partir de la utilización de 36 segmentos de líneas por bloque, el algoritmo presenta una efectividad superior al 95% en todos los casos analizados. La comparación del algoritmo desarrollado con el sistema *Gemcom-Gems 6.0*, muestra un patrón de similitud en los resultados arrojados por ambas soluciones. La prueba de rendimiento realizada muestra que el algoritmo desarrollado puede calcular el volumen y el tonelaje en un modelo de bloques con 500000 bloques y utilizando 100 segmentos de líneas por bloque, en aproximadamente 4 minutos y utilizando menos de 120 MB de memoria RAM.

Conclusiones

- El cálculo sobre un modelo de bloques, del volumen y el tonelaje del material contenido dentro de un dominio geométrico, es una tarea difícil y compleja producto a la combinación de algoritmos de Geometría Computacional con algoritmos de Integración Numérica y al elevado costo computacional de las operaciones realizadas.
- La indexación de los bloques del modelo en una estructura de datos lineal, los triángulos de las restricciones geométricas y los segmentos de líneas en un arreglo bidimensional, permitieron optimizar el rendimiento computacional del algoritmo desarrollado.
- El algoritmo desarrollado permite calcular sobre un modelo de bloques, el volumen y tonelaje del material contenido en un dominio geométrico, teniendo en cuenta tres escenarios diferentes de restricción geométrica, lo cual da muestra de la factibilidad de uso del algoritmo.
- Las pruebas realizadas para determinar la efectividad del método de cálculo del volumen del material basado en el coeficiente de ocupación de los segmentos de líneas, el cual es utilizado por el algoritmo desarrollado, mostraron que cuando se usan más de 49 segmentos de líneas por bloque, el algoritmo mantiene una efectividad media superior al 99 %.
- La comparación en cuanto al cálculo del volumen y el tonelaje del material contenido en un dominio geométrico, realizada entre el algoritmo desarrollado y el sistema profesional *Gemcom-Gems* en su versión 6.0, mostró un patrón de similitud entre los resultados alcanzados, lo cual da muestra de la confiabilidad del algoritmo desarrollado.

Recomendaciones

El autor de la presente investigación recomienda que:

- El algoritmo desarrollado se incluya en el Sistema de Análisis y Modelado de Yacimientos Minerales (Syam), desarrollado en el Centro de Geoinformática y Señales Digitales (GEYSED) en la Universidad de las Ciencias Informáticas.
- Extender el algoritmo desarrollado para que utilice técnicas de programación paralela y aproveche mejor los recursos de hardware en computadoras que tengan microprocesadores de varios núcleos.
- Extender el algoritmo desarrollado para que se pueda calcular el volumen y el tonelaje en modelos de bloques rotados y multiresolución.

Referencias bibliográficas

- [Alfaro, 2007] Alfaro, M. A. S. (2007). Estimación de recursos mineros. Technical report.
- [Armstrong and Carignan, 1997] Armstrong, M. and Carignan, J. (1997). *Géostatistique Linéaire, Application au Domaine Minier*. École de Mines de Paris.
- [Asano et al., 1997] Asano, T., Ranjan, D., Roos, T., Welzl, E., and Widmayer, P. (1997). Space-filling curves and their use in the design of geometric data structures. *Theoretical Computer Science*, 181(1):3–15.
- [Assibey-Bonsu and Krige, 1999] Assibey-Bonsu, W. and Krige, D. (1999). Use of direct and indirect distributions of selective mining units for estimation of recoverable resource/reserves for new mining projects. In *Proceedings of 28th APCOM Symposium: Colorado School of Mines, Golden*, pages 239–244.
- [Awange and Kyalo, 2013] Awange, J. L. and Kyalo, J. B. K. (2013). Fundamentals of surveying and geodesy. In *Environmental Geoinformatics*, Environmental Science and Engineering, pages 31–45. Springer Berlin Heidelberg.
- [Badouel, 1990] Badouel, D. (1990). An efficient ray-polygon intersection. In *Graphics gems*, pages 390–393. Academic Press Professional, Inc.
- [Clark, 1951] Clark, D. (1951). *Plane and Geodetic Surveying for Engineers*, volume 2. London: Constable.
- [Cuador and Estévez, 2004] Cuador, J. Q. G. and Estévez, E. C. (2004). Conceptos fundamentales de la geoestadística. Technical report, Universidad de Pinar del Río.

- [David, 2012] David, M. (2012). *Geostatistical ore reserve estimation*. Elsevier.
- [De Floriani and Magillo, 2009] De Floriani, L. and Magillo, P. (2009). Triangulated irregular network. In *Encyclopedia of Database Systems*, pages 3178–3179. Springer.
- [Deakin, 2005] Deakin, R. E. (2005). Engineering surveying, earthworks and volumes.
- [Delfiner et al., 2009] Delfiner, P. et al. (2009). *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*, volume 497. John Wiley & Sons.
- [Deutsch and Journel, 1992] Deutsch, C. V. and Journel, A. G. (1992). *Geostatistical software library and user's guide*, volume 1996. Oxford university press New York.
- [Dostal and Tindell, 1978] Dostal, M. and Tindell, R. (1978). The jordan curve theorem revisited. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein*, 80:111–128.
- [Du et al., 1999] Du, Q., Faber, V., and Gunzburger, M. (1999). Centroidal voronoi tessellations: applications and algorithms. *SIAM review*, 41(4):637–676.
- [El-Sheimy et al., 2005] El-Sheimy, N., Valeo, C., and Habib, A. (2005). *Digital Terrain Modeling: Acquisition, Manipulation And Applications*. Artech House Remote Sensing Library. Artech House.
- [Estévez, 2009] Estévez, E. C. (2009). Apuntes sobre la estimación de recursos y reservas. Technical report, Universidad de Pinar del Río.
- [Fink, 2003] Fink, A. (2003). *The survey handbook*, volume 1. Sage.
- [Frey et al., 1996] Frey, P. J., Borouchaki, H., and George, P. L. (1996). Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach. In *5th International Meshing Roundtable*, pages 31–48. Citeseer.
- [Gargantini et al., 1989] Gargantini, I., Schrack, G., and Atkinson, H. (1989). Adaptive display of linear octrees. *Computers & Graphics*, 13(3):337–343.
- [Gemcom, 2010] Gemcom (2010). *Gemcom for Windows, User Manual*. GEOVIA Gemcom. version 6.0.

- [Gillette, 1920] Gillette, H. P. (1920). *Earthwork and Its Costs: A Handbook of Earth Excavation*. McGraw-Hill Book Company, Incorporated.
- [Glacken and Snowden, 2001] Glacken, I. and Snowden, D. (2001). Mineral resource estimation. *Mineral Resource and Ore Reserve Estimation—The AusIMM Guide to Good Practice, The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne. P*, pages 189–198.
- [Hales, 2007a] Hales, T. C. (2007a). The jordan curve theorem, formally and informally. *American Mathematical Monthly*, 114(10):882–894.
- [Hales, 2007b] Hales, T. C. (2007b). Jordan’s proof of the jordan curve theorem. *Studies in logic, grammar and rhetoric*, 10(23):45–60.
- [Houlding, 1999] Houlding, S. (1999). Direct volume estimation - a geostatistical technique for mine planning and grade control. *Computers & Geosciences*, 25(10):1113–1123.
- [Houlding, 2000] Houlding, S. (2000). *Practical geostatistics: modeling and spatial analysis. Manual*, volume 1. Springer.
- [Journel, 1980] Journel, A. (1980). The lognormal approach to predicting local distributions of selective mining unit grades. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 12(4):285–303.
- [Journel and Huijbregts, 1978] Journel, A. and Huijbregts, C. J. . (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press (London).
- [Krige, 1976] Krige, D. (1976). A review of the development of geostatistics in south africa. In *Advanced geostatistics in the mining industry*, pages 279–293. Springer.
- [Kurtz et al., 2004] Kurtz, D. S., Kurzweil, J., and Swartz, C. W. (2004). *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*, volume 9. World scientific.
- [Lee and Requicha, 1982] Lee, Y. T. and Requicha, A. A. G. (1982). Algorithms for computing the volume and other integral properties of solids. II. a family of algorithms based on representation conversion and cellular approximation. *Commun. ACM*, 25(9):642–650.
- [Legrá, 2006] Legrá, A. A. R. (2006). *Software Tierra Versión 2.5.16*. Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa.

- [Legrá, 2010] Legrá, A. A. R. (2010). Automatización del control del cálculo de extracciones en la mina de la empresa niquelera ernesto ché guevara. *Revista Cubana de Minería y Geología*, XVI(II):55–73.
- [Lepin and Ariosa, 1986] Lepin, O. V. and Ariosa, J. D. (1986). *Búsqueda, exploración y evaluación geólogo económica de yacimientos de minerales sólidos*. Editorial Pueblo y Educacion.
- [Matheron, 1963] Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. *Economic geology*, 58(8):1246–1266.
- [Meagher, 1982] Meagher, D. (1982). Geometric modeling using octree encoding. *Computer Graphics and Image Processing*, 19(2):129–147.
- [Mirtich, 1996] Mirtich, B. (1996). Fast and accurate computation of polyhedral mass properties. *journal of graphics tools*, 1(2):31–50.
- [Okabe et al., 2009] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., and Chiu, S. N. (2009). *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*, volume 501. John Wiley & Sons.
- [Olender and CA., 1980] Olender, H. and CA., S. I. M. P. (1980). *Analysis of a Triangulated Irregular Network (TIN) Terrain Model for Military Applications*. Defense Technical Information Center.
- [Ortiz and Herrera, 2002] Ortiz, F. P. and Herrera, J. (2002). Curso de laboreo de minas. Technical report, Universidad Politécnica de Madrid Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Minas.
- [Pascucci and Frank, 2001] Pascucci, V. and Frank, R. J. (2001). Global static indexing for real-time exploration of very large regular grids. In *Supercomputing, ACM/IEEE 2001 Conference*, pages 45–45. IEEE.
- [Peckham and Jordan, 2007] Peckham, R. J. and Jordan, G. (2007). *Digital Terrain Modelling: Development and Applications in a Policy Support Environment*. Springer.
- [Peucker et al., 1978] Peucker, T. K., Fowler, R. J., Little, J. J., and Mark, D. M. (1978). The triangulated irregular network. In *Amer. Soc. Photogrammetry Proc. Digital Terrain Models Symposium*, volume 516, page 532.

- [Rendu and N., 2001] Rendu, J. and N., M. (2001). *Mineral Resources and Mineral Reserves Progress On International Definitions And Reporting Standards*.
- [Schrodeder et al., 1996] Schrodeder, W. A., Martin, K. W., and Lorensen, B. (1996). *The Visualization Toolkit: An Object-Oriented Approach to 3-D Graphics*. Prentice Hall PTR.
- [Sinclair and Blackwell, 2002] Sinclair, A. J. and Blackwell, G. H. (2002). *Applied mineral inventory estimation*. Cambridge University Press.
- [SME, 1999] SME (1999). *A GUIDE FOR REPORTING EXPLORATION INFORMATION, MINERAL RESOURCES, AND MINERAL RESERVES*. THE RESOURCES AND RESERVES COMMITTEE, THE SOCIETY FOR MINING, METALLURGY AND EXPLORATION, INC., 8307 SHAFFER PARKWAY LITTLETON, COLORADO 80127.
- [Yang et al., 2005] Yang, Y.-J., Yong, J.-H., and Sun, J.-G. (2005). An algorithm for tetrahedral mesh generation based on conforming constrained delaunay tetrahedralization. *Computers & Graphics*, 29(4):606–615.